UNIVERSITÉ PARIS-EST

Ecole Doctorale : Mathématiques et Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

de l'Université Paris-Est

par

Omar Lazar

Étude de la régularité des solutions faibles d'énergie infinie d'une équation de transport non locale

Soutenue le 21 février 2013 devant le jury composé de :

Directeurs de thèse :

Marco Cannone	Professeur, Univ. Paris-Est.
Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset	Professeur, Univ. d'Évry-Val-d'Essonne.

Rapporteurs :

Diego Córdoba	Professeur, ICMAT-UAM, Madrid.
Marius Païcu	Professeur, Univ. de Bordeaux 1.

Examinateurs et Président du jury :

Thierry Cazenave	Directeur de recherche, Univ. Paris 6.

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions l'existence de solutions faibles d'énergie infinie de l'équation quasi-géostrophique dissipative critique (notée SQG) sur $\mathbb{R}^2$ ainsi qu'une équation de transport 1D dont la vitesse est non locale. Dans un premier temps, nous nous sommes attachés à étudier l'équation (SQG) lorsque la donnée initiale est dans l'espace de Morrey-Campanato non homogène $L^2_{uloc}(\mathbb{R}^2)$. Le manque de décroissance à l'infini du noyau de convolution de l'opérateur de Riesz ne permet pas de considérer le cas d'une donnée intiale $L^2_{uloc}(\mathbb{R}^2)$. Cependant, en donnant plus de décroissance au noyau de l'opérateur de Riesz, ou de façon équivalente, en donnant plus d'oscillations à θ_0 nous rendons possible l'étude dans des espaces de type Morrey-Campanato. Dans une seconde partie, nous nous sommes intéressés à l'étude d'une équation de transport 1D dont la vitesse est non locale. Contrairement à l'équation (SQG), l'approche Morrey-Campanato pour l'équation 1D ne fournit pas de résultats satisfaisants. Le caractère non local de cette équation associé au fait qu'elle ne soit pas écrite sous forme divergence introduit de grandes difficultés. Cependant, nous allons voir que l'étude dans les espaces de Lebesgue à poids est possible et cette dernière approche fournit aussi des solutions d'énergie infinie.
Dans le **chapitre 2**, nous établissons un résultat d'existence globale de solutions faibles pour l'équation quasi-géostrophique dissipative critique lorsque la donnée initiale θ_0 est dans l'espace de Morrey-Campanato $\Lambda^s(\dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, où $1/4 < s \leq 1$. Ainsi, nous étendons le résultat de Resnick [Res] concernant l'existence de solutions faibles pour des données initiales dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Comme le noyau de Riesz n'a pas suffisamment de décroissance à l'infini, nous sommes contraints de donner plus d'oscillations à la donnée initiale en posant $\theta_0 = \Lambda^s w_0$. La preuve du théorème principal est basée sur l'étude du modèle tronqué sur une boule de rayon R centrée en l'origine. Pour des raisons techniques, en plus de la troncature, la donnée initiale doit être régularisée (en convolant avec une fonction régularisante ρ_ϵ) et nous notons $(SQG)_{R,\epsilon}$ l'équation (SQG) dont la donnée initiale est tronquée et régularisée. Nous obtenons ensuite des estimations *a priori* permettant d'avoir une inégalté d'énergie fournissant non seulement la régularité désirée mais aussi la compacité nécessaire au passage à la limite faible dans l'équation $(SQG)_{R,\epsilon}$ lorsque les paramètres ϵ, R tendent respectivement vers 0 et l'infini. Le passage à la limite est basé sur une version du théorème de Rellich, ce dernier permet d'avoir une convergence forte en norme $(L^2([0,T], L^2(\mathbb{R}^2))_{loc}$ dans un des deux facteurs du terme non linéaire, ceci associé à une utilisation répétée du théorème de Banach-Alaoglu.
Dans le **chapitre 3**, nous traitons le cas d'une donnée initiale $\theta_0 \in \Lambda^s(\dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, lorsque $0 < s < 1/4$ et nous obtenons un résultat d'existence de solutions faibles. Comme dans le cas $1/4 < s \leq 1$, on utilise une méthode d'énergie pour démontrer ce résultat. Le manque de régularité ne permet pas d'avoir une inégalité d'énergie garantissant l'existence globale de solutions faibles, cependant, on montre

que pour toute donnée initiale $\theta_0 \in \Lambda^s(\dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)) \cap L^\infty$ il existe au moins une solution faible locale. Plus l'oscillation est petite, plus on s'approche du cas singulier $\theta_0 \in L^2_{uloc}$ et l'amplitude des oscillations correspondant à l'indice $s = 1/4$ semble être critique dans un certains sens.
Dans le **chapitre 4**, nous sommes intéressés à l'étude d'une équation 1D avec un terme de diffusion fractionnaire dont la vitesse est non locale. Nous faisons quelques remarques sur l'hypothèse de positivité généralement nécessaire pour avoir un principe du maximum $L^2(\mathbb{R})$ comme il est prouvé dans l'article de Córdoba, Córdoba et Fontelos [CCF]. Plus précisément nous montrons que cette condition de signe n'est pas indispensable si l'on souhaite avoir un résultat d'existence globale dans le cas de donnée $H^2(\mathbb{R})$. Nous nous sommes aussi intéressés aux solutions d'énergie infinie dont la donnée est dans l'espace de Lebesgue à poids $L^2(w(x))$ où $w(x)$ est un poids appartennant à la classe $\mathcal{A}_2$ de Muckhenhoupt. Nous sommes parvenus à obtenir un résultat d'existence globale de solutions dans $L^\infty L^2(w) \cap L^2 \dot{H}^{\alpha/2}(w)$ ceci permet d'étendre un résultat obtenu par Córdoba, Córdoba et Fontelos dans [CCF].
Nous finissons ce chapitre en énonçant un théorème d'existence globale de solutions d'énergie est inifinie pour une famile d'équations de transport générique incluant l'équation quasi-géostrophique dissipative et non dissipative.

Abstract

In this thesis, we address the study of weak infinite energy solutions for the critical dissipative quasi-geostrophic (SQG) equation. We also study a 1D transport equation with a non local velocity. More precisely, we consider the (SQG) equation with data in Morrey-Campanato type spaces and the other equation in a weighted Lebesgue spaces. Both spaces generate infinite energy solutions. As in the Navier-Stokes equation case, it is worth to study the existence of solutions when the initial data lies in the Morrey space $L^2_{uloc}(\mathbb{R}^2)$. Unfortunately, because of the lack of decay of the Riesz operator, we cannot suppose that $\theta_0 \in L^2_{uloc}(\mathbb{R}^2)$ since the equation does not makes sense. Nevertheless, we overcome this difficulty by giving more oscillations to the initial data θ_0. This new setting allows us to show that the equation makes sense and we are able to obtain a global existence result. Since we always plan to use the maximal principle we will often suppose that the initial data is in $L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Regarding the 1D equation with non local velocity, the existence of weak Morrey solutions is not easy to obtain, this is due to the fact that the nonlinearity is not written in a divergence form. Nevertheless, we are able to adress the study of this 1D transport equation in a weighted Lebesgue space and this also provides infinite energy solutions.

In **chapter 2**, we show that for any initial data lying in the space $\Lambda^s(\dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, where $1/4 < s \leq 1$, we have global existence of weak solutions. The proof is based on the study of the truncated equation (on a ball of radius $R > 0$ centered at the origin) associated with a truncated and regularized initial data (by making a convolution with a standard mollifer). We obtain some *a priori* estimates giving rise to an energy inequality. This latter provides us the desired regularity along with the desired compactness. Indeed, the energy inequality involves the strong convergence in $(L^2([0,T], L^2(\mathbb{R}^2))_{loc}$ coming from the use of the Rellich compactness theorem, this fact together with the use of Banach Alaoglu theorem allow us to pass to the limit when the parameters R and ϵ converge respectively toward $+\infty$ and 0. Beside giving an extension of the Resnick result [Res] this theorem allows us to study the existence of homogenous statistical solutions.

In **chapter 3**, we treat the case $0 < s < 1/4$. More precisely, we show that for all initial data lying in $\Lambda^s(\dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ we have local existence of solutions. The proof is also based on an energy inequality verified by the truncated and regularized equation.

In **chapter 4**, we study a 1D model equation driven by a non local velocity. This equation has been considered by Córdoba, Córdoba and Fontelos in [CCF] where the authors show that for all positive initial data in $H^2(\mathbb{R}^2)$ we have global existence of solutions. We first make some remarks regarding the positivity condition of the initial data by showing that this condition is not necessary for keeping the global

control but we actually lost the L^2 maximum principle and the L^2 decay at infinity. In the second part of the chapter, we show a global existence result of solutions for all positive initial data belonging to the weighted Lebesgue spaces $L^2(w)$ where w is a weight of the $\mathcal{A}_2$ class of Muckenhoupt. The method we used may easily be extended to other active scalar equations whose velocity is given by a Calderón-Zygmund operator which therefore includes the inviscid or the dissipative quasi-geostrophic equation.

Liste des notations et des espaces

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ et $s \in \mathbb{R}$, on notera :

• $B(x, R)$: boule ouverte de rayon R centrée en x

• supp f : support de la fonction f

• $x \mapsto \mathbb{1}_A$: fonction indicatrice de l'ensemble A

• l_2 : espace des suites de carré intégrable

• $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$: espace des fonctions de la classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$

• $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$: espace des fonctions de la classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ à support compact.

• $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: espace des fonctions de la classe de Schwartz i.e $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées.

• $L^p(\mathbb{R}^n)$: espace de Lebesgue, autrement dit, l'ensemble des fonctions mesurables de puissance p-ième intégrable :

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}$$

• $L^p(w)$: espace de Lebesgue à poids, autrement dit, l'ensemble des fonctions mesurables de puissance p-ième intégrable :

$$\|f\|_{L^p(w)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, w(x) \mathrm{d}x \right)^{1/p}$$

• $\mathcal{A}_p(w)$: espace de Muckenhoupt.

• $H^s(\mathbb{R}^n)$: espace de Sobolev d'indice $s \in \mathbb{R}$

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}', \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi < \infty \right\}$$

• BMO : espace de John-Nirenberg, c'est l'espace des fonctions localement intégrables f telles que

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{B \in \mathcal{B}} \frac{1}{|B|} \int_B |f - f_B| \, dx$$

ici $\mathcal{B}$ désigne l'ensemble de toutes les boules $B(x,r)$, où $r > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $|B|$ désigne la mesure de Lebesgue de la boule B sur $\mathbb{R}^n$, et $f_B = \dfrac{1}{|B|}\displaystyle\int_B |f(x)|\,dx$.

- $L^p_{uloc}(\mathbb{R}^n)$: espace des distributions tempérées dont la puissance p-ième est localement intégrable, autrement dit

$$\|f\|_{L^p_{uloc}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\int_{|x-y|<1} |f(y)|^p\,dy\right)^{1/p}$$

- $H^s_{uloc}(\mathbb{R}^n)$: espace des distributions tempérées qui sont uniformément localement dans $H^s(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|^2_{H^s_{uloc}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|^2_{L^2_{uloc}(\mathbb{R}^n)} + \|\Lambda^s f\|^2_{L^2_{uloc}(\mathbb{R}^n)}$$

- $\dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^n)$: espace des distributions tempérés qui sont uniformément localement dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^n)} = \|\Lambda^s f\|^2_{L^2_{uloc}(\mathbb{R}^n)}$$

- $B^s_{p,q}$, $1 \le p \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $1 \le q < \infty$: espace de Besov non homogènes (définis via la décomposition de Littlewood-Paley)

$$B^s_{p,q} = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\ \|f\|_{B^s_{p,q}} = \|S_0 f\|_{L^p} + \left(\sum_{j\ge 0} 2^{jsq}\|\Delta_j f\|^q_p\right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}$$

- $\dot{B}^s_{p,q}$, $1 \le p \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $1 \le q < \infty$: espace de Besov homogènes (définis *via* la décomposition de Littlewood-Paley)

$$\dot{B}^s_{p,q} = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P},\ \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsq}\|\Delta_j f\|^q_p\right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des polynômes de n variables à coefficients dans $\mathbb{C}$

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Equations de transport non locales

1.1.1 L'équation quasi-géostrophique sans dissipation

La première partie de la thèse est consacrée à l'étude de la régularité des solutions de l'équation quasi-géostrophique dissipative critique, l'étude sera faite dans l'espace $\mathbb{R}^2$ tout entier. L'équation sans dissipation a été introduite par Constantin, Majda, et Tabak en 1994 (voir [CMT]). Elle s'écrit de la façon suivante :

$$(SQG) : \begin{cases} \partial_t \theta(x,t) + u.\nabla\theta = 0 \\ u(\theta) = (\partial_{x_2}\Lambda^{-1}\theta, -\partial_{x_1}\Lambda^{-1}\theta) \\ \theta(0,x) = \theta_0(x) \end{cases}$$

où

$$\Lambda^\alpha \theta = (-\Delta)^{\alpha/2}\theta = C_\alpha P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\theta(x) - \theta(x-y)}{|y|^{2+\alpha}} dy,$$

L'inconnue est $\theta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui est alors une fonction scalaire. Dans la suite des calculs, nous nous passerons d'écrire la valeur principale puisque, lorsque $0 < \alpha < 1$, l'intégrale est absolument convergente (dans le cas où θ est assez régulière, ce qui sera le cas). Dans cette équation, le réel $\alpha \in]0, 2[$ est un paramètre fixé, la constante C_α est positive et ne dépend que de α. Cette équation est un cas particulier d'équations d'évolutions décrivant la variation de température d'un fuide non homogène dans un demi-espace en rotation rapide (*strongly rotating fluids*) avec des petits nombres de Rossby et Ekman (voir [Pe] pp. 345-368). La vitesse du fluide est modélisée par $u = (u_1, u_2)$ et s'exprime en fonction des transformées de Riesz de θ de la façon suivante :

$$u(\theta) = (-\mathcal{R}_2\theta, \mathcal{R}_1\theta) = (-\partial_{x_2}(-\Delta)^{-1/2}\theta, \partial_{x_1}(-\Delta)^{-1/2}\theta).$$

Autrement dit, la vitesse u s'écrit comme la dérivée perpendiculaire d'une fonction de flot Ψ :

$$u = \nabla^{\perp}\Psi = \begin{bmatrix} -\partial_{x_2}\Psi \\ \partial_{x_1}\Psi \end{bmatrix}$$

Ainsi, u est de divergence nulle, c'est-à-dire $\nabla.u = 0$. Cette hypothèse traduit l'incompressibilité du fluide. La fonction de flot Ψ est définie comme une convolution entre θ et un noyau singulier K :

$$\Psi(x) = \int_{\mathbb{R}^2} K(x-y)\theta(y)\ dy,$$

Dans le cas de l'équation quasi-géostrophique, le noyau K n'est rien d'autre que le potentiel de Riesz d'ordre 1 défini par

$$K(y) = \frac{C}{|y|},\ \text{où } C > 0$$

Ce qui implique (voir Stein [Ste])

$$\Psi = (-\Delta)^{-1/2}\theta$$

L'intêret mathématique d'un tel modèle vient du fait que cette équation est étroitement liée à l'équation d'Euler 3D écrite en terme de vorticité ($\overrightarrow{w} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{u}$). Les équations d'Euler 3D pour un fluide incompressible de vitesse $u = (u_1, u_2, u_3)$ et de pression $p = (p_1, p_2, p_3)$ s'écrivent

$$(\mathcal{E}_u) : \begin{cases} \partial_t u(x,t) + u.\nabla u + \nabla p = 0 \\ \nabla.u = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

Cette équation en terme de vorticité w prend la forme suivante

$$(\mathcal{E}_w) : \begin{cases} \partial_t w(x,t) + u.\nabla w - w\nabla u = 0 \\ w = rot(u) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

Par ailleurs, en prenant la dérivée orthogonale $\nabla^{\perp}\theta = (-\partial_2\theta, \partial_1\theta)$ dans l'équation (SQG) on obtient l'équation suivante

$$(\nabla^{\perp}SQG) : \begin{cases} \partial_t \nabla^{\perp}\theta(x,t) + u.\nabla\nabla^{\perp}\theta - \nabla u\nabla^{\perp}\theta = 0 \\ \nabla^{\perp}\theta = \Lambda\theta \\ \nabla^{\perp}\theta(0,x) = \nabla^{\perp}\theta_0(x) \end{cases}$$

C'est ainsi que Constantin, Majda et Tabak [CMT] ont remarqué que ces deux équations ont le même type de non linéarité et que la vorticité w dans l'équation $\mathcal{E}_w$ joue un rôle analogue à $\nabla^\perp\theta$ dans le cas de l'équation $\nabla^\perp SQG$. Ce lien peut s'interpréter autrement, les lignes de niveaux de θ sont analogues aux lignes de vortex de l'équation d'Euler 3D puisque w est tangente aux lignes de vortex et $\nabla^\perp\theta$ est tangent aux lignes de niveaux de θ.
La seconde motivation est purement physique, elle est celle de l'étude de la frontogénèse correspondant la formation en temps fini de discontinuité du front de température à l'interface entre les courants chauds et les courants froids.
Bien que l'équation quasi-géostrophique et l'équation d'Euler tridimensionnelle soient liées, il est important de noter que les transformées de Riesz

$$u(x) = c\ P.V \int \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^3}\theta(y)\ dy$$

sont plus singulières que l'opérateur de Biot et Savart dans le cas de l'équation d'Euler 2D :

$$u(x) = C\ \int \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2}\theta(y)\ dy$$

Pourtant, de façon assez surprenante, le problème de l'existence globale de solutions faibles pour le cas l'équation quasi-géostrophique est plus facile à traiter que le cas de l'équation d'Euler 2D. Ceci est dû à la structure assez spéciale du terme non linéaire dans l'équation quasi-géostrophique. La preuve de l'existence de solutions faibles lorsque la vitesse dans l'espace $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ pour l'équation d'Euler 2D dûe à Delort [Del] puis simplifié par Majda [Maj] utilise des techniques d'analyse assez difficiles pour permettre un passage à la limite dans le terme non linéaire. Dans le cas de l'équation quasi-géostrophique, la preuve est nettement plus simple, elle est basée sur des intégrations par parties et une estimation d'un commutateur (voir [Res]).

Etant donné que l'équation quasi-géostrophique ne possède aucun terme régularisant, il est naturel de chercher des solutions de régularité minimale, l'approche classique consiste à montrer l'existence de solutions faibles. Une solution θ est dite faible si elle vérifie l'équation (SQG) au sens des distributions, dans ce cas, en multipliant l'équation (SQG) par une fonction $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, en intégrant par parties et en intégrant en temps $s \in [0,T]$ on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^2} \phi(x)\theta(T,x)\ dx - \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x)\theta_0(x)\ dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u\theta(x,s)\nabla\phi\ dx\ ds$$

L'existence de solutions faibles a été établie par Resnick en 1995 dans [Res]. Il a démontré que pour tout $T > 0$ et pour toute donnée initiale $\theta_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$, il existe une solution faible $\theta \in L^\infty([0,T], L^2)$. Montrer la régularité de ces solutions faibles est un problème très difficile et encore ouvert pour l'équation quasi-géostrophique sans dissipation. C'est une des raisons pour laquelle l'idée naturelle consistant à régulariser l'équation en y ajoutant un terme dissipatif a été longuement exploitée.

1.1.2 L'équation quasi-géostrophique dissipative

Le modèle régularisé suivant a été introduit par Constantin et Wu dans [CW] :

$$(SQG)_\alpha : \begin{cases} \partial_t\theta(x,t) + u.\nabla\theta + \nu\Lambda^\alpha\theta = 0 \\ u(\theta) = (\partial_{x_2}\Lambda^{-1}\theta, -\partial_{x_1}\Lambda^{-1}\theta) \\ \theta(0,x) = \theta_0(x) \end{cases}$$

Malheureusement, ce modèle régularisé ne fournit pas une approche satisfaisante au problème consistant à montrer la régularité des solutions faibles globales de l'équation dans le cas conservatif. En effet, dans le cas $\alpha \in [0,1[$, la régularité des solutions construites par Resnick est un problème ouvert. L'obstacle principal est le manque de régularité pour contrôler le terme non linéaire, le terme de diffusion ne régularise pas suffisamment pour permettre un contrôle du terme d'advection ($i.e$ $u.\nabla\theta$). Il est clair que le cas α petit est mathématiquement très intéressant à comprendre étant donné que dans le cas α petit, ou de façon équivalente quand la dissipation tend vers 0, l'équation quasi-géostrophique converge vers les équations de Navier-Stokes tridimensionnelle. Bien qu'artificiel, ce modèle est physiquement intéressant dans le cas $\alpha = 1$. Le terme dissipatif étant alors de la forme $(-\Delta)^{1/2}\theta$, ce dernier modélise le pompage d'Ekman observable dans les courants marins par exemple. Ce phénomène apparaît lors de la compétition entre les vents qui soufflent à la surface des océans et la force de Coriolis (déviant l'eau à la surface des océans, vers la droite à l'hémisphère nord et vers la gauche à l'hémisphère sud) provoquant la remontée des eaux à la surface. Mathématiquement, la puissance $\alpha = 1$ corresponds à l'indice pour lequel le terme non linéaire et la dissipation sont du même ordre (dans le sens où $u(\theta)$ et $(-\Delta)^{1/2}\theta$ sont deux opérateurs dérivant une fois). En utilisant la technique de De Giorgi (voir annexe A1), Caffarelli et Vasseur [CV] ont démontré en 2006 que les solutions faibles construites par Resnick sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Plus précisement, ils étudient l'équation quasi-géostrophique sur $\mathbb{R}^n$ avec une vitesse $u \in L^\infty BMO$ qui est alors une équation de transport générale. Le cas $\alpha = 1$ correspond donc à la régularisation minimale garantissant l'existence de solutions faibles globales régulières. Les remarques précédentes motivent la définition suivante :

Définition 1. *On définit les 3 cas suivants :*
- *Le cas $0 \leq \alpha < 1$ est le cas sur-critique*
- *Le cas $\alpha = 1$ est le cas critique*
- *Le cas $1 < \alpha \leq 2$ est le cas sous-critique*

Dans la section suivante, nous donnons les principaux résultats des travaux traitant des questions d'unicités et d'existence globale de solutions dans les différents cas.

1.1.3 Rappel de quelques résultats connus pour l'équation quasi-géostrophique dissipative 2D

Les travaux sur l'étude de l'équation quasi-géostrophique en particulier les questions mathématiques qui se posent naturellement lors de l'étude du problème de Cauchy à savoir les questions de régularité, d'existence, de blow-up, d'unicité, des solutions (fortes, faibles, mild, auto-similaires..) ont fait l'objet ces dernières années de nombreux travaux. L'objectif principal étant de mieux comprendre les questions ouvertes sur l'équation d'Euler 3D. Le résultat fondateur de la plupart des travaux est celui de Resnik en 1995. Il a non seulement prouvé l'existence globale de solutions faibles avec données L^2 mais il a aussi montré que l'équation quasi-géostrophique possédait des lois de conservation. Le principe du maximum L^p avec $p \in [1, \infty]$ est un outil très utile et quasiment incontournable dans les estimations. Il a été démontré par Resnick [Res] puis par Córdoba et Córdoba [CC]. De manière plus générale, ils considérent l'équation $(SQG)_\alpha$ avec une force f

$$\partial_t \theta(x,t) + u.\nabla\theta + \nu\Lambda^\alpha\theta = f(x,t) \tag{1.1}$$

Ce principe s'énonce ainsi :

Principe du maximum. *Soit θ une solution régulière satisfaisant l'équation (1.1) avec $f \in L^1((0,T), L^p)$ où $1 < p < \infty$ alors :*

$$\|\theta(t)\|_{L^p} \leq \|\theta_0\|_{L^p} + \int_0^t \|f(s)\|_{L^p}\, ds$$

Les deux démonstrations de ce résultat reposent sur le lemme de positivité (valable en toute dimension d'espace).

Lemme de positivité. *Supposons $\theta \in L^p$ et $\Lambda^\alpha\theta \in L^p$, avec $1 < p < \infty$. Alors*

$$\int \theta|\theta|^{p-2}\Lambda^\alpha\theta\, dx \geq 0$$

Il est important de noter que, si θ est suffisamment régulière, la condition d'incompressibilité du fluide ($\nabla.u = 0$) n'est pas essentielle dans la preuve du principe du maximum (voir [Res]). La démonstration du principe du maximum repose sur le calcul suivant

$$\partial_t\|\theta\|_p^p = -p\int |\theta|^{p-2}\theta(u\nabla)\theta\, dx - p\int |\theta|^{p-2}\theta\Lambda^{2\alpha}\theta\, dx + p\int |\theta|^{p-2}\theta f\, dx$$

Une intégration par parties (justifiée si θ et u ont suffisamment de décroissance à l'infini) et la condition d'incompressibilité nous permettent d'écrire

$$p\int |\theta|^{p-2}\theta(u\nabla)\theta dx = \int (u\nabla)|\theta|^p\, dx = 0$$

En utilisant le lemme de positivité pour le deuxième terme on en déduit que

$$\partial_t \|\theta\|_p^p \leq p \int |\theta|^{p-2}\theta f \; dx \leq p\|f\|_p \|\theta\|_p^{p-1}$$

et donc,

$$\partial_t \|\theta(x,t)\|_p \leq \|f(x,t)\|_p$$

En faisant tendre p vers l'infini, on retrouve le principe du maximum L^∞. Maintenant si l'on suppose que le fluide n'est pas incompressible, on écrit

$$\left| p \int |\theta|^{p-2}\theta(u\nabla)\theta dx \right| \;\; = \;\; \left| \int |\theta|^p div(u) dx \right| \leq \|div(u)\|_{L^\infty} \|\theta\|_p^p$$

et donc

$$\partial_t \|\theta\|_p^p \leq \|div(u)\|_\infty \|\theta\|_p^p + p\|f\|_p \|\theta\|_p^{p-1}$$

et,

$$\partial_t \|\theta\|_{L^p} \leq \frac{1}{p} \|div(u)\|_\infty \|\theta\|_{L^p} + \|f\|_{L^p}$$

d'où

$$\|\theta\|_p \leq \|\theta_0\|_p e^{\frac{1}{p}\int_0^t \|div(u)\|_\infty \; ds} + \int_0^t \|F(s)\|_p e^{\frac{1}{p}\int_\sigma^t \|div(u)\|_\infty \; d\sigma} \; ds$$

Si θ est régulière on a $\displaystyle\int_0^t \|div(u)\|_\infty \; ds < \infty$ et en faisant tendre p vers l'infini on retrouve le principe du maximum L^∞.

Dans le cas conservatif et sans force exterieure, on a conservation de la norme $\dot{H}^{-1/2}$, pour le voir on écrit

$$\frac{1}{2}\partial_t \int_{\mathbb{R}^2} |\Lambda^{-1/2}\theta|^2 \; dx = \int_{\mathbb{R}^2} \Lambda^{-1}\theta \mathcal{R}^\perp \theta . \nabla\theta \; dx$$

mais comme

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Lambda^{-1}\theta \mathcal{R}^\perp \theta . \nabla\theta \; dx = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{R}\theta . \mathcal{R}^\perp \theta \; dx = 0$$

La quantité

$$\|\theta\|_{\dot{H}^{-1/2}} = \partial_t \int_{\mathbb{R}^2} |\Lambda^{-1/2}\theta|^2 \; dx$$

est donc conservée au cours du temps. Cette quantité peut-être interprétée comme étant le Hamiltonien de l'équation (voir [Res]).

Lorsque l'on cherche à étudier les questions d'existence, globale ou locale, de solutions (fortes, faibles, *mild* ou auto-similaires) il est important de connaître le *scaling* de l'équation en question et de rechercher les espaces critiques (c'est-à-dire dont la norme est invariante par le changement d'échelle de l'équation). Dans le cas de l'équation quasi-géostrophique, nous avons le *scaling* suivant : si θ est une solution de $(SQG)_\alpha$ sur $(0,T)\times\mathbb{R}^2$ issue de la donnée initiale θ_0 alors la fonction $\theta_\lambda(t,x)=\lambda^{\alpha-1}\theta(\lambda^\alpha t,\lambda x)$ est solution de $(SQG)_\alpha$ issue de la donnée initiale $\theta_\lambda(0,x)=\lambda^{\alpha-1}\theta_0(\lambda x)$ sur $(0,\lambda^{-\alpha}\times\mathbb{R}^2)$. Un exemple d'espace critique est la suite d'espaces de Besov homogènes $\dot{B}^{1+\frac{2}{p}-\alpha}_{p,r}$ où $p,r\in[1,\infty]$.

Dans le cas sous critique, correspondant au cas $1<\alpha\leq 2$, les questions d'existence globale et d'unicités sont bien comprises. Ce cas correspond aux valeurs de α pour lesquelles la dissipation est un opérateur qui dérive strictement plus qu'une fois, alors que le terme non linéaire contient exactement une dérivée. On peut par exemple rappeler (voir [Res], [Ju]) que pour toute donnée initiale $\theta_0\in H^s$, $s>2-2\alpha$, $s\geq 0$ il existe une solution globale régulière. Constantin et Wu ont démontré dans [CW] que pour toute donnée initiale régulière la solution restait régulière pour tout temps. Rappelons qu'une des méthodes pour montrer l'existence et l'unicité de solutions faibles consiste à écrire le problème de Cauchy sous forme intégrale et de résoudre le nouveau problème par une méthode de point fixe, une telle solution est appelée solution *mild*. Plus précisément, on dit qu'une solution θ est une solution *mild* de l'équation $(SQG)_\alpha$ si elle vérifie l'équation intégrale suivante

$$\theta(x,t)=e^{-t\Lambda^\alpha\theta_0}+B(\theta,\theta)$$

où B est la forme bilinéaire suivante

$$B(f,g)=\int_0^t e^{-(t-s)\Lambda^\alpha}\nabla.(f\mathcal{R}^\perp g)\ ds$$

Contrairement au cas de l'équation de Navier-Stokes, l'approche mild pour l'équation quasi-géostrophique dans le cas critique et sur critique ne fournit aucun résultat et l'existence locale de solution mild reste un problème ouvert. Cependant, dans le cas sous-critique, Marchand a démontré dans [Mar] que si θ_0 appartenait à un espace proche de $\dot{H}^1$ alors il y a existence d'une solution mild. Un autre résultat dans le cas sous critique qui se démontre par une approche mild (voir [Wu]) est le suivant, si $\theta_0\in L^p$ avec $p>\dfrac{2}{\alpha-1}$ alors il existe une unique solution globale $\theta\in L^pL^q$ où q est telle que

$$\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{q}=\alpha-1$$

Dans le cas critique $\alpha=1$, l'un des premier résultat (valable aussi dans le cas sur critique $0\leq\alpha<1$) a été celui de Resnick en 1995 [Res] dans lequel il a démontré l'existence globale de solutions faibles avec données arbitrairement grandes dans $L^\infty\cap L^2$ et vérifiant une inégalité d'énergie de type "Leray". En 2006, Marchand

[Mar] a étendu le résultat d'existence de solutions faibles de Resnick [Res]. Il a démontré que pour toute donnée initiale $\theta_0 \in L^p$ avec $p > \dfrac{4}{3}$ et pour tout $t \in (0,T)$, il existe une solution faible globale vérifiant l'inégalité d'énergie suivante

$$\|\theta(x,t)\|_p^p + pk\int_0^t \int \theta|\theta|^{p-2}\Lambda^{2\alpha}\theta \ dx \ ds \leq \|\theta_0\|_p^p$$

Si $\theta_0 \in H^{-1/2}$ alors il existe une solution $\theta \in L^\infty((0,T), H^{-1/2}) \cap L^2, H^{\alpha-1/2})$ satisfaisant pour tout $t \in (0,T)$ l'inégalité d'énergie

$$\|\theta(x,t)\|_{H^{-1/2}} + pk\int_0^t \int |\Lambda^{\alpha-\frac{1}{2}}\theta|^2 \ dx \ ds \leq \|\theta_0\|^2_{H^{-1/2}}$$

Dans le cas super-critique ou conservatif, la question de la régularité de telles solutions a été une question naturellement soulevée et est rapidement apparu comme un défit d'une grande difficulté. Généralement, on essaie de chercher des solutions soit par des méthodes d'énergie, soit par l'approche *mild*. L'un des problèmes est le fait que, pour faciliter les estimations, on est le plus souvent contraint à travailler avec une donnée initiale dans L^∞ afin d'utiliser la loi de conservation. Dans le cas critique, l'espace L^∞ est à la même echelle que l'espace critique $\dot{H}^1$. C'est la raison pour laquelle les résultats d'existence globale connus dont les preuves utilisent une approche mild ou une methode d'énergie ne sont en générale validés que sous une hypothèse de petitesse de $\|\theta_0\|_{L^\infty}$. En 2001, Constantin, Cordóba et Wu [CCW] ont réussi à avoir un resultat de régularité partielle. Ils ont démontré que sous une hypothèse de petitesse de $\|\theta_0\|_{L^\infty}$ et si $\theta_0 \in H^1$ alors la solution reste dans H^1 pour tout temps (l'unicité est démontrée dès que la donnée initiale est H^2). Ce n'est qu'en 2006 qu'à la fois Caffarelli et Vasseur [CV] d'une part et d'autre part Kiselev, Nazarov et Volberg [KNV] obtiennent des résultats d'existence globale sans condition de petitesse sur la donnée initiale. Plus précisément, Caffarelli et Vasseur ont prouvé que pour toute donnée initiale $\theta_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ l'équation de transport

$$\begin{cases} \partial_t\theta(x,t) + v.\nabla\theta + \Lambda\theta = 0 \\ v \in L_t^\infty BMO(\mathbb{R}^n) \\ \theta(0,x) = \theta_0(x) \end{cases}$$

admet une solution globale régulière vérifiant, $\forall\ T > 0$

$$\theta \in L^\infty((0,T), L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2((0,T), \dot{H}^1) \cap \mathcal{C}^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^n)$$

Leur démonstration repose sur la technique de De Giorgi. La preuve de ce théorème se fait en différentes étapes. Les auteurs prouvent d'abord que la solution issue d'une donnée initiale dans L^2 est L^∞ (voir annexe A1), puis ils montrent que la solution

L^∞ est C^γ pour un certain $\gamma > 0$, puis finalement que la solution C^γ est une solution classique (de classe $\mathcal{C}^\infty$). Cette technique s'applique à d'autres équations paraboliques (voir annexe A1). Le résultat de Kiselev, Nazarov et Volberg [KNV] est un résultat de propagation de régularité. Ils ont démontré que pour toute donnée initiale périodique $\theta_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ il existe une unique solution globale vérifiant pour tout $T > 0$, $\theta \in \mathcal{C}^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)$ et vérifiant de plus l'inégalité

$$\|\nabla\theta(x,t)\|_{L^\infty} \leq C\|\nabla\theta_0\|_{L^\infty} \exp\exp(C\|\theta\|_{L^\infty})$$

Cette croissance en double exponentielle va dans le même sens que ce qu'avait prédit les simulations numériques dans [CNS]. La preuve de ce résultat est très astucieuse. Elle repose sur l'introduction du module de continuité ω de θ et l'utilisation de l'équivalent du critère d'explosion de Beale, Kato et Majda [BKM] connu pour le système de Navier-Stokes dans le cas de l'équation quasi-géostrophique. Cet analogue a été présenté par Constantin, Majda et Tabak dans [CMT]. Il s'énonce ainsi, si $[0,T^*)$ est un intervalle maximal d'existence de solution régulière de l'équation quasi-géostrophique si et seulement si

$$\int_0^T \|\nabla^\perp\theta\|_{L^\infty}\ ds \xrightarrow[T\to T*]{} \infty$$

Les auteurs ont ensuite utilisé le fait suivant, si ω est un module de continuité de $\theta : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, alors on a toujours

$$\left|\nabla\theta\right|(x) \leqslant \omega'(0), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

Pour le voir il suffit d'écrire de prendre un vecteur $e \in \mathbb{R}^2$ unitaire et d'écrire que d'une part,

$$\left|\theta(x+he) - \theta(x)\right| \leqslant \omega(h), \qquad \forall h > 0$$

et d'autre part,

$$\left|e\cdot\nabla\theta\right|(x) = \lim_{h\to 0}\left|\frac{\theta(x+he)-\theta(x)}{h}\right| \leqslant \lim_{h\to 0}\frac{\omega(h)-\omega(0)}{h} = \omega'(0).$$

car $\omega(0) = 0$ par définition.

Ainsi, pour contrôler $\|\nabla^\perp\theta\|_{L^\infty}$, il suffit de construire un module de continuité ω qui est préservé par l'équation. La question importante est donc de construire un tel module de continuité. Les auteurs raisonnent par l'absurde en examinant les cas où le module de continuité n'est plus conservé par l'équation. Si θ_0 a pour module de continuité ω, et si au bout d'un certain temps t_0 ce même ω n'est plus un module de continuité de θ, alors nécessairement il existe deux points x et y distincts tels que $|\theta(x,t_0) - \theta(y,t_0)| = \omega(|x-y|)$. Le temps t_0 peut-être vu comme le temps maximal de préservation du module de continuité par l'évolution. Kiselev, Nazarov et Volberg montrent ensuite que le seul scénario alternatif possible ($i.e$, $x = y$) est exclu si l'on choisit ω tel que $\omega''(0) = -\infty$. En effet, comme $\|\nabla^\perp\theta\|_{L^\infty} \leq \omega'(0)$ cela signifierait que ω n'était déjà plus un module de continuité au temps t_0. Le dernier résultat d'existence de solutions sans conditions de petitesse dans le cas critique est celui de Abidi et Hmidi [AH]. Ils obtiennent un résultat d'existence globale lorsque que la donnée initiale est dans l'espace critique $\dot{B}^0_{\infty,1}$. Ils démontrent que si $\theta_0 \in \dot{B}^0_{\infty,1}$, alors il existe une solution globale

$$\theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+;\ \dot{B}^0_{\infty,1}) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}_+;\ \dot{B}^1_{\infty,1}).$$

Leur preuve est basée sur l'étude d'une équation de transport-diffusion dont la vitesse v est un champ de vecteurs à divergence nulle vérifiant $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2))$. Ils démontrent d'abord l'existence locale en utilisant une approche lagrangienne (voir [HM]) et ils obtiennent un effet régularisant de la solution : si T^* est le temps maximal d'existence, alors pour tout $T < T^*$ on a

$$t^\beta\theta(t) \in \mathcal{C}([0,T], \dot{B}^\beta_{\infty,1})$$

Pour passer du local au global, Abidi et Hmidi utilisent la méthode de Kiselev, Nazarov et Volberg [KNV]. La principale difficulté est liée au fait que cette méthode ne s'applique que dans le cas périodique. Cependant, Abidi et Hmidi [HM] ont montré que l'hypothèse de périodicité peut être remplacée par une décroissance à l'infini de la solution (la décroissance à l'infini vient du choix de la donnée initiale, elle est prise dans l'adhérence des fonctions test dans l'espace de Besov $\dot{B}^\beta_{\infty,1}$).

Dans le cas super-critique ($0 \leq \alpha < 1$), il y a seulement des résultats partiels. On a des résultats d'existence globale lorsque les données initiales sont petites ou existence locale lorsque les données intiales sont grandes. A. Córdoba et D. Córdoba ont montré dans [CC] qu'il existe une solution globale si la donnée est dans l'espace de Sobolev H^m où $m < 2$. Le reste de la littérature semble se restreindre aux résultats obtenus par Chae et Lee [ChLee] dans lequel il démontre que si la donnée initiale est petite dans l'espace critique $B^{2-\alpha}_{2,1}$ alors il existe une unique solution globale. Ce résultat a été amélioré par Ju dans [Ju] où il montre qu'il suffit que la donnée initiale soit petite dans H^s avec $s > 2 - \alpha$. On peut aussi citer les résultats de Wu [Wu2], [Wu], dans le premier article [Wu2], il démontre que si $r > 1$, $1 < q < \infty$ et $\theta_0 \in C^r \cap L^q$ avec une condition de petitesse sur cette norme alors il existe une solution globale. Dans le second [Wu], il améliore encore la condition, il suffit d'avoir une donnée initiale dans l'espace de Besov $B^2_{2,\infty} \cap B^s_{2,\infty}$ avec $s > 2 - \alpha$. Plus récemment, en 2007, Hmidi et Keraani ont montré dans [HK] que si $p \in [1,\infty]$ et $s \geq s^p_c$, avec $s^p_c = 1 + \dfrac{2}{p} - \alpha$ et si $\theta_0 \in \mathcal{X}^s_p$ alors il existe un $T > 0$ et une solution θ appartenant à

$$C([0,T]; \mathcal{X}^s_p) \cap L^1([0,T]; \dot{B}^{s+\alpha}_{p,1}).$$

Où

$$\mathcal{X}_p^s = \begin{cases} B^s_{p,1}, & \text{si} \quad p < \infty, \\ B^s_{\infty,1} \cap \dot{B}^0_{\infty,1}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, sous la condition de petitesse

$$\|\theta_0\|_{\dot{B}^{1-\alpha}_{\infty,1}} \leq \eta,$$

la solution devient globale. Leur preuve est basée sur une approche langrangienne (en introduisant une équation de transport-diffusion un peu plus générale) ainsi qu'une estimation d'un commutateur et des techniques issues du calcul paradifférentiel comme celle de [AH] ou [HM]. Les techniques de calculs paradifférentiels ont aussi permis à Constantin et Wu [CW] de montrer un résultat de propagation de régularité (en 2007 aussi). Ils ont montré que si θ est une solution faible de type Leray-Hopf, à savoir

$$\theta \in L^\infty([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2([0,\infty); \dot{H}^\alpha(\mathbb{R}^2)). \tag{1.2}$$

et si δ et t_0 sont deux nombres vérifiant $\delta > 1 - 2\alpha$ et $0 < t_0 < t < \infty$, alors la condition

$$\theta \in L^\infty([t_0, t]; C^\delta(\mathbb{R}^2)), \tag{1.3}$$

implique que

$$\theta \in C^\infty((t_0, t] \times \mathbb{R}^2).$$

D'autres résultats ont été obtenu par Q. Chen, C. Miao et Z. Zhang [CMZ]. Ils ont montré que si $(\alpha, p, q) \in (0,1] \times [2,\infty) \times [1,\infty)$ et si $\theta_0 \in B^\sigma_{p,q}$ avec $\sigma = \dfrac{2}{p} + 1 - \alpha$, alors il existe un temps $T > 0$ tel que $\theta(t,x)$ vérifie

$$\theta(t,x) \in C([0,T); B^\sigma_{p,q}) \cap \widetilde{L}^1(0,T; \dot{B}^{\frac{2}{p}+1}_{p,q}),$$

où le temps d'existence locale est borné par

$$\sup\left\{T' > 0 : \left\|(1 - e^{-\kappa c_p 2^{2\alpha j} T'})^{\frac{1}{2}} 2^{j\sigma} \|\Delta_j \theta_0\|_p\right\|_{\ell^q(\mathbb{Z})} \leqslant c\kappa\right\}.$$

Si $\|\theta_0\|_{\dot{B}^\sigma_{p,q}} \leqslant \epsilon\kappa$ pour un certain $\epsilon > 0$, alors la solution devient globale.

Depuis les travaux récents de P. Constantin et J. Wu (voir [CW3] [CW4]), le probème de la régularité des solutions faibles dans le cas sur-critique revient à montrer que pour si une solution faible de type Leray-Hopf est Hölderienne de classe $\mathcal{C}^\delta$ avec $\delta > 1 - 2\alpha$ sur un intervalle de temps $[t_0, t]$, alors c'est une solution classique sur l'intervalle $(t_0, t]$. Les auteurs démontrent aussi que, partant d'une donnée initiale $\theta_0 \in L^2$ la solution de Leray-Hopf devenait L^∞ (en étendant la preuve de [CV] au cas sur-critique). Le problème ouvert se reduit donc à savoir si toute solution L^∞ devient $\mathcal{C}^\delta$.

1.1.4 Equation de transport 1D dissipative

1.1.5 Présentation de l'équation et de quelques résultats connus

Dans le chapitre 4, nous nous sommes intéressés à l'étude de l'équation de transport avec diffusion fractionnaire suivante

$$(\mathcal{T})_\alpha \ : \begin{cases} \partial_t\theta - \theta_x \mathcal{H}\theta + \nu\Lambda^\alpha\theta = 0 \\ \theta(0,x) = \theta_0(x) \end{cases}$$

L'opérateur $\mathcal{H}$ est la transformation de Hilbert, définie par

$$\mathcal{H}\theta \equiv \frac{1}{\pi} PV \int \frac{\theta(y)}{x-y}\ dy,$$

et

$$\Lambda^\alpha\theta \equiv (-\Delta)^{\alpha/2}\theta = C_\alpha P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\theta(x)-\theta(x-y)}{|y|^{2+\alpha}} dy,$$

où $C_\alpha > 0$ est une constante positive ne dépendant que de α où $0 < \alpha < 2$.

Cette équation provient d'un modèle simple d'équation 1D introduit par P. Constantin, P. Lax et A. Majda dans [CLM] dans le but de mieux comprendre l'équation d'Euler écrite en terme de vorticité. L'équation qu'ils étudient est la suivante :

$$\partial_t\omega = \omega\mathcal{H}\omega$$

D'autres modèles ont été proposés, par exemple S. De Gregorio, dans [Deg], suggère l'étude du modèle lD suivant :

$$\omega_t = v\omega_x = \omega\mathcal{H}\omega \tag{1.4}$$

Cette dernière équation peut-être retrouvée en prenant la dérivée par rapport à x et en posant $v = -\mathcal{H}$, on obtient alors une version dissipative de l'équation (2). Ce modèle peut aussi être vue comme l'équation quasi-géostrophique dissipative en $1D$ (non écrite sous forme divergence) et par conséquent, il est de ce fait lié à l'équation d'Euler 3D écrite en terme de vorticité. Une autre motivation est le lien qu'a cette équation avec l'équation de Birkoff-Rott. Rappelons que l'équation de Birkoff-Rott est une équation modélisant l'évolution d'une nappe de tourbillon (*vortex sheet*). Les nappes de tourbillon peuvent-être vu comme des solutions particulières de l'équation d'Euler 2D écrite en terme de vorticité. On prend une donnée initiale ω_0 qui est une mesure concentrée sur une courbe régulière de $\mathbb{R}^2$ et on suppose que la vorticité initale $\omega_0 \in H^{-1}(\mathbb{R}^2)$. Cette faible régularité vient du fait que la vorticité est à support sur une courbe (que l'on exprime avec une distribution de Dirac) par conséquent, comme la vitesse est discontinue, le cas classique $\omega \in L^p \cap L^1$ avec $1 < p < \infty$ fournit des conditions trop fortes et il faut reformuler l'équation d'Euler de telle sorte que l'équation ait un sens dans les deux classes de distributions (voir par exemple le livre de Bertozzi et Majda [BM02], pp 361-363). On suppose donc que la vorticité est concentrée sur une courbe régulière S et que le champs de vitesse est discontinu le long de la courbe. La courbe S divise le plan en deux régions et on paramétrise cette courbe S par $z(\alpha,t) = x(\alpha,t) + iy(\alpha,t)$ à l'instant t. On note κ la courbure moyenne de S et $\gamma(\alpha,t)$ la longueur de la courbe, ainsi l'équation s'écrit

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{z}(\alpha,t) &= \frac{1}{2\pi i} P.V \int \frac{\gamma(\alpha')}{z(\alpha,t) - z(\alpha',t)}\, d\alpha' \\ \partial_t \gamma &= \sigma \kappa_\alpha \end{aligned}$$

En considérant la version 1D de l'équation de Birkoff-Rott puis en identifiant $\gamma(\alpha,t)$ à θ, et enfin en prenant $\sigma = 0$ de telle sorte que γ est constante le long des trajectoires, on en déduit que ce modèle est analogue à l'équation de transport 1D dans le cas conservatif (voir [BLM]) :

$$\partial_t \theta = \theta_x \mathcal{H}\theta$$

L'équation de Birkoff-Rott n'admet pas de solution globale lorsque $\sigma = 0$ pour des données intiales régulières (voir [BM02]). Le même résultat a été obtenu par [CC] de l'équation de transport 1D dans le cas conservatif qui est analogue au problème de Birkoff-Rott.

Comme dans le cas de l'équation quasi-géostrophique, on distingue trois cas dépendant de la valeur du paramètre α, à savoir, les cas : $\alpha < 1$, $\alpha = 1$, et $\alpha \geq 1$ respectivement appelé sur-critique, critique et sous critique. Dans le cas sous-critique, Córdoba, Córdoba, et Fontelos [CCF] ont montré un résultat d'existence globale lorsque la donnée est dans l'espace de Sobolev H^2 et est positive. Ils traitent aussi le cas critique $\alpha = 1$ pour lequel ils obtiennent des résultats d'existence globable pour des données petites dans H^2. En utilisant la méthode de [KNV] on peut montrer que dans le cas critique, que pour toute donnée initiale périodique et $\mathcal{C}^\infty$, il existe une unique solution régulière (voir [Dong]). Dans le cas sur-critique, le problème est à moitié compris. Généralement, lorsque des difficultés sont rencontrés lors de l'étude de l'existence de solution pour une équation on essaie de chercher un modèle plus simple qui s'y approche afin de pourvoir en déduire ou au moins conjecturer certaines propriétés des solutions. L'équation de transport 1D a beaucoup de ressemblance avec l'équation de Burger fractionnaire. L'étude de l'équation de Burger fractionnaire dans [KNS] par A. Kiselev, F. Nazarov, et R. Shterenberg n'est *a priori* pas favorable à un résultat d'existence globale dans le cas conservatif. En effet, dans [KNS] (voir thm 1.2 et 1.4) les auteurs montrent qu'il existe une donnée initiale periodique $\mathcal{C}^\infty$ telle que, dans le cas sur critique (*i.e,* $0 < \alpha < 1/2$), la solution $\theta \in \mathcal{C}([0,T], H^s) \cap L^2([0,T], H^{s+\alpha})$ de l'équation de Burger fractionnaire

$$\partial_t \theta = \theta\theta_x - (-\Delta)^\alpha \theta, \quad \theta(0,x) = \theta_0(x)$$

explose en temps fini pour tout $s > 3/2 - 2\alpha$. Malheureusement, leur démonstration ne s'applique pas au cas de l'équation de transport 1D comme nous allons le voir, néanmoins, elle pourrait ouvrir la voie à d'autres approches. Un résultat similaire à celui de [KNS] a été obtenu par N. Alibaud, J. Droniou, et J. Vovelle dans [ADV]. Les auteurs montrent que, dans le cas sur-critique, l'équation ne régularise pas la donnée initiale même si cette dernière est régulière *i.e* $\mathcal{C}^\infty$. Si la donnée initiale est régulière et petite alors la solution reste au moins Lipschitzienne, la situation se détériore dans le cas de grandes données initiales. Des résultats de blow-up pour l'équation de transport 1D sans dissipation ont aussi été obtenus par Córdoba, Córdoba, et Fontelos [CCF]. Ils démontrent que, si la donnée initiale vérifie des conditions de localisation, de régularité (un peu mieux que $\mathcal{C}^1$), de positivité ainsi que des conditions sur le maximum de la donnée initale θ_0 alors l'équation de transport 1D admet une solution dont la norme Lipschitz explose en temps fini. Dans [CCF2], Córdoba, Córdoba, et Fontelos améliorent le résultat d'explosion obtenu dans [CCF]. Ils démontrent que si la donnée initiale est régulière (un peu mieux que $\mathcal{C}^1$), positive, et à support compact alors l'équation sans dissipation n'admet pas de solution globale en temps et localement bornée en espace. La question naturelle que l'on se pose est de savoir si, en mettant de la dissipation, on peut montrer l'existence globale de solutions. Malheureusement, la présence de dissipation ne donne pas nécessairement l'existence de solutions globales. En effet, Rodrigo et Li dans [RL1] ont montré qu'en considérant l'équation légèrement dissipative *i.e* $\alpha \in [0, 1/4]$ pour une classe de donnée initiale générique les solutions de l'équation de transport 1D explosaient en temps fini. Leur preuve est basée sur un critère d'explosion de type Beale, Kato, Majda vérifié dans le modèle 1D. Le cas sur-critique $\alpha \in (1/4, 1/2)$ reste un problème ouvert intéressant pour lequel on ne sait pas s'il existe une solution globale ou qui explose en temps fini.
Dans le cas de l'équation quasi-geostrophique conservative, Kiselev et Nazarov [KN] ont construit une classe de donnée initiale s'exprimant à l'aide de polynômes trigonométriques bien choisis et vérifiant la condition de petitesse $\|\theta_0\|_{H^s} \leq 1$ si $s \geq 11$, pour laquelle la solution θ vérifie, pour tout $A > 0$: $\limsup_{t\to+\infty} \|\theta\|_{H^s} \geq A$

D'autres modèles ont été étudiés, par exemple par Castro et Córdoba. Dans [CaC] où les auteurs démontrent l'existence d'une solution auto-similaire d'une équation modifiée dans le cas conservatif.

1.2 Solutions d'énergie infinie

1.2.1 Cas de données initiales appartenant à des espaces de Morrey-Campanato

Un des objectif de la thèse était d'étudier l'existence et la régularité des solutions de l'équation quasi-géostrophique dissipative critique lorsque les données sont dans des espaces de Morrey-Campanato (typiquement les espaces L^p_{uloc} et H^s_{uloc}) comme dans le travail de P-G Lemarié-Rieusset [PLR2] ou plus récémment Basson [Bass]. Ces espaces permettent d'étendre les résultats d'existence connus lorsque la donnée est dans un espace de Lebesgue ou de Sobolev d'une part, et ils permettent d'autre part de construire des solutions statistiques spatialement homogènes moyennant le fait que les équations considérées aient un sens dans les espaces de Morrey-Campanato. Donner un sens à l'équation n'est pas toujours facile. Dans le cas de l'équations quasi-géostrophique dissipative, le premier obstacle rencontré a été celui de donner un sens aux transformées de Riesz qui ne sont pas définies dans l'espace $L^2_{uloc}(\mathbb{R}^2)$. La principale difficulté réside dans le contrôle des basses fréquences des transformées de Riesz. En fait, on peut donner un sens à $u = \mathcal{R}^{\perp}\theta$ lorsque $\theta \in L^2_{uloc}$ à condition de demander à ce que les basses fréquences S_j converge vers 0 dans $\mathcal{S}'$ lorsque $j \to -\infty$ et que $\mathcal{R}^{\perp}(Id - S_j)\theta$ converge dans $\mathcal{S}'$ vers une fonction de L^2_{uloc}. Cette dernière approche a été utilisée par Marchand [Mar] dans l'étude des solutions globales de donnée initiale $\theta_0 \in \dot{H}^{-1/2}$. Dans notre cas nous utilisons une approche un peu différente que celle de Marchand. Afin de donner un sens à l'équation, et surtout aux transformées de Riesz, l'idée consiste à donner plus de décroissance à l'infini au noyau de l'opérateur de Riesz. A cette fin, nous posons $\theta = \Lambda^s w$ et nous supposons que $w \in \dot{H}^s_{uloc}$ avec $0 < s < 1$. Pour pouvoir utiliser le principe du maximum L^∞, qui est indispensable si l'on souhaite avoir des estimations globales en temps, nous supposons de plus que θ est dans L^∞. L'idée de la preuve est basée sur un schéma classique. Elle consiste à étudier l'équation tronquée sur une boule de rayon R puis obtenir une inégalité d'énergie fournissant la compacité nécessaire au passage à la limite faible par rapport au paramètre R. La donnée initiale tronquée est dans un espace plus petit dans lequel on sait résoudre l'équation. Dans notre cas, la donnée initiale tronquée est dans $L^2 \cap L^\infty$. Le résultat de Resnick (ou plus récemment celui de Marchand [Mar]) permet d'affirmer qu'il existe une solution de type Leray-Hopf (qui est régulière par le résultat de Caffarelli et Vasseur [CV]) mais cette régularité n'est pas suffisante pour justifier les calculs. Plus précisément, nous avions besoin d'intégrabilité (au moins H^2) dans le but de donner un sens au intégrale apparaissant dans le calcul de la norme. La solution (en w) de Resnick est dans l'espace $L^2((0,T), \dot{H}^{s+1/2})$ et comme $0 < s < 1$, il y a un manque de régularité lorsque s est assez petit. Nous avons besoin d'estimer globalement le produit $u\theta$ dans une norme Sobolev de régularité positive. Nous avons donc besoin pour cela d'un contrôle global des transformées de Riesz dans l'espace $L^\infty L^\infty$ ceci est difficile à obtenir ca les transformées de Riesz n'envoient pas L^∞ dans L^∞ mais dans un espace un peu plus grand, à savoir l'espace BMO. Le résultat de Abidi et Hmidi [HM] sur la propagation de la norme $\dot{B}^0_{\infty,1}$ permet d'avoir cette borne globale étant donné que $\dot{B}^0_{\infty,1} \subset L^\infty$ nous avons donc besoin non seulement de tronquer mais aussi de régulariser la donnée initiale pour pouvoir utiliser le résultat de Abidi et Hmidi. Dans l'estimation d'un terme, nous sommes contraints d'imposer $1/4 \leq s \leq 1$ car le cas $0 \leq s \leq 1/4$ ne fournit pas d'estimation globale en temps comme nous allons le voir plus bas. Il est important de noter que si $3/2 \leq s < 2$ alors la solution tronquée a assez de régularité Sobolev et notre résultat s'étend au cas super-critique et même de façon plus générale au cas conservatif car la dissipation critique n'est ajoutée que dans le but d'utiliser le résultat de Abidi et Hmidi. Nous avions aussi besoin, dans les estimations *a priori* pour la donnée intiale d'avoir $w_0 \in L^\infty$, en écrivant de façon astucieuse w_0 on a pu montrer que $w_0 \in L^\infty$. Nous avons montrer que sous l'hypothèse $\theta_0 = \Lambda^s w_0 \in L^\infty \cap \Lambda^s(H^s_{uloc})$, il existe une solution globale si $1/4 < s < 1$ et locale si $0 < s < 1/4$. Plus précisement, nous avons ainsi obtenu les deux théorèmes suivant

Dans ce cas $1/4 \leq s < 1$, nous avons le théorème d'existence globale suivant

Théorème 1. *Supposons que $1/4 \leq s < 1$, et $\theta_0 \in \Lambda^s(\dot{H}^s_{uloc}) \cap L^\infty$, alors l'équation (SQG) possède au moins une solution faible θ vérifiant pour tout $T < \infty$*

$$\theta \in (L^\infty([0,T], L^2))_{uloc} \cap (L^2_t([0,T], \dot{H}^{1/2}))_{uloc}$$

et

$$w \in (L^\infty([0,T], \dot{H}^s))_{uloc} \cap (L^2_t([0,T], \dot{H}^{s+1/2}))_{uloc}.$$

De plus, pour tout $t \leq T$, on a l'estimation suivante :

$$\|w(x,t)\|^2_{L^\infty_t \dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)} \leq c\ e^{CT},$$

où c et C sont deux constantes ne dépendant que de $\|\theta_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ et $\|w_0\|_{\dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)}$

Pour des valeurs plus petites "s" nous obtenons un théorème d'existence locale pour toute donnée initiale $\theta_0 \in \Lambda^s(\dot{H}^s_{uloc}) \cap L^\infty$. Il est important de noter que plus "s" est petit plus on s'approche du cas singulier $\theta_0 \in L^2_{uloc}(\mathbb{R}^2)$, c'est probablement l'une des raisons pour laquelle nous avons seulement un résultat d'existence locale.

Dans le cas $0 < s < 1/4$ nous avons montré le théorème d'existence locale suivant :

Théorème 2. *Supposons que $0 \leq s < 1/4$, et $\theta_0 \in \Lambda^s(\dot{H}^s_{uloc}) \cap L^\infty$, alors l'équation (SQG) possède au moins une solution faible locale θ vérifiant pour tout*

$$T < \frac{C(\|\theta_0\|_\infty)}{1 + \|w_{0,R}\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}}}$$

on a :

$$\theta \in (L^\infty([0,T], L^2))_{uloc} \cap (L^2_t([0,T], \dot{H}^{1/2}))_{uloc}$$

et

$$w \in (L^\infty([0,T], \dot{H}^s))_{uloc} \cap (L^2_t([0,T], \dot{H}^{s+1/2}))_{uloc}.$$

De plus, pour tout $t \leq T$, la solution w vérifie l'inégalité d'énergie :

$$\|w_R(x,t)\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}} \leq \|w_0\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}} + C\int_0^t \Big(\|w\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}} + \|w\|^4_{\dot{H}^s_{uloc}} + C\Big)\, ds$$

où C est une constante qui ne dépend que de $\|\theta_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ et $\|w_0\|_{\dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)}$.

Remarque 1. *Le terme $\|w\|^4_{\dot{H}^s_{uloc}}$ peut être remplacé par $\|w\|^\delta_{\dot{H}^s_{uloc}}$ pour un certain $\delta > 2$, nous avons choisi de fixer certains indices afin de simplifier l'inégalité finale.*

1.2.2 Cas de données initiales appartenant à des espaces de Lebesgue à poids

Dans le second modèle que nous avons étudié, à savoir l'équation 1D notée $\mathcal{T}_\alpha$, nous avons obtenu un théorème montrant le contrôle globale sans condition de signe sur la donnée initiale $\theta_0 \in H^2$. Ce type de question a été traité par H. Dong [Dong] dans lequel il s'intéresse aussi au cas d'une donnée sans condition de signe. Notre démonstration est simple, l'inconvénient de celle-ci est que nous perdons la décroissance à l'infini de la norme L^2 et l'énergie n'est plus conservée par l'équation (notons que Dong n'obtient pas la conservation de l'énergie). Plus précisement, en notant

$$\|\theta_0\|^2_{L^2} e^{ct} \equiv F(t)$$

Nous avons obtenu le théorème suivant

Théorème 1. *Supposons que $\theta_0 \in H^2(\mathbb{R})$, $\nu > 0$ et $\alpha > 1$. Alors, il existe une constante $C > 0$, qui ne dépend que de θ_0 et ν, telle que pour tout $t > 0$ nous avons :*

$$\|\Lambda^{1/2}\theta\|^2_{L^2} \leq \|\Lambda^{1/2}\theta_0\|^2_{L^2} + \|\theta_0\|^2_{L^2} + C\int_0^t (F(s))^\alpha\, ds$$

Et il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $T > 0$

$$\|\Lambda\theta(x,T)\|^2_{L^2} \lesssim \|\Lambda\theta_0\|^2_{L^2} + C\int_0^T (F(s))^K\, ds$$

Nous nous sommes aussi intéressés aux solutions faibles lorsque la donnée initiale est dans l'espace de Lebesgue à poids $L^2(w)$, où w est un poids de la classe $\mathcal{A}_2$ de Muckenhoupt. Nous obtenons le théorème suivant

Théorème 2. *On suppose que $1 < \alpha < 2$, alors pour toute donnée intiale positive $\theta_0 \in L^2(w(x)dx) \cap L^\infty$ avec $w(x) = (1+|x|)^{-\beta}$, $0 < \beta < 1$. Il existe au moins une solution faible globale θ à l'équation $\mathcal{T}_\alpha$, telle que, pour tout $T > 0$*

$$L^\infty([0,T], L^2(w(x)dx)) \cap L^2([0,T], \dot{H}^{\alpha/2}(w(x)dx))$$

De plus,

$$\|\theta(x,T)\|^2_{L^2(w)} \leq \|\theta_0\|^2_{L^2(w)} e^{CT}$$

où $C > 0$ est une constante ne dépendant que de $\|\theta_0\|_{L^\infty}$

En fait la démonstration du précédent théorème peut se généraliser à une classe plus grande d'équations de transport dans l'espace tout entier $\mathbb{R}^n$ dont la vitesse est un opérateur de Calderón-Zygmung T, l'équation est la suivante

$$(\mathcal{G}_\alpha) \ : \ \begin{cases} \partial_t\theta = -\nabla(T(\theta)\theta) - \nu\Lambda^\alpha\theta \\ \nabla.T(\theta) = 0 \\ \theta(0,x) = \theta_0(x) \in L^2(w) \end{cases}$$

Dans ce sens, nous obtenons le théorème suivant

Théorème 3. *Pour toute donnée initiale positive $\theta_0 \in L^2(w) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ il existe au moins une solution faible θ à l'équation $\mathcal{G}_\alpha$, telle que, pour tout $T > 0$*

$$L^\infty([0,T], L^2(w(x)dx)) \cap L^2([0,T], \dot{H}^{\alpha/2}(w(x)dx))$$

De plus,

$$\|\theta(x,T)\|^2_{L^2(w)} \leq \|\theta_0\|^2_{L^2(w)} e^{CT}$$

où $C > 0$ est une constante ne dépendant que de $\|\theta_0\|_{L^\infty}$

Remarque 2. *Un exemple d'équation appartennant à cette classe est l'équation quasi-géostrophique $(SQG)_\alpha$, avec $0 < \alpha < 2$.*

Chapitre 2

Un résultat d'existence globale pour l'équation (SQG) dissipative critique

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'équation surface quasi-géostrophique (SQG) dissipative, critique sur l'espace $\mathbb{R}^2$ tout entier.

$$(SQG) : \begin{cases} \partial_t\theta = u.\nabla\theta - (-\Delta)^{1/2}\theta \\ u = (u_1, u_2) = (-R_2\theta, R_1\theta) \end{cases}$$

Rappelons que $\theta : (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction scalaire modélisant la température du fluide, et R_1 et R_2 désignent les transformées de Riesz usuelles dans $\mathbb{R}^2$, plus précisément u est définie par :

$$u(\theta) = (\partial_{x_2}(-\Delta)^{1/2}\theta, -\partial_{x_1}(-\Delta)^{1/2}\theta),$$

ou encore par :

$$\widehat{u}(\xi) = (\widehat{u_1}(\xi), \widehat{u_2}(\xi)) = (i\frac{\xi_2}{|\xi|}\widehat{\theta}(\xi), -i\frac{\xi_1}{|\xi|}\widehat{\theta}(\xi))$$

où $\widehat{u}$ est la transformée de Fourier de $u \in \mathcal{S}$ définie par :

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\xi.x}u(x)\ dx$$

L'objectif de ce chapitre est d'étendre le résultat de Resnick au cas de données dans un espace de Morrey-Campanato. Rappelons le résultat de Resnick, dans le cas de l'équation avec dissipation :

Théorème 8 (Resnick). *Supposons* $\theta_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$*, alors, pour tout* $T > 0$*, il existe au moins une solution faible de l'équation (SQG) vérifiant*

$$\partial_t \int \theta\phi \; dx + \int \theta(u.\nabla\phi) \; dx + \int (\Lambda^{1/2}\phi)(\Lambda^{1/2}\theta) \; dx = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$$

De plus,

$$\theta \in L^\infty([0,T], L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2([0,T], \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^2))$$

Comme dans le cas des solutions faibles de Leray pour l'équation de Navier-Stokes incompressible, la première idée qui vient à l'esprit est celle d'étendre le résultat d'existence globale de Resnick à une donnée $\theta_0 \in L^2_{uloc}(\mathbb{R}^2)$ (voir chapitre 33 de [PGLR]). Etant donné que les transformées de Riesz ne sont pas bien définies dans $L^2_{uloc}(\mathbb{R}^2)$ cette première approche ne fournit aucun résultat. En effet, pour voir qu'elles ne sont pas définies sur L^2_{uloc}, il suffit de calculer $\mathcal{R}f$ avec $f(x,y) = \chi_{\{x>0,y>0\}}$ où $A \mapsto \chi_A$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A. Il est clair que $f \in L^2_{uloc}(\mathbb{R}^2)$ et un calcul immédiat montre que dans ce cas $\mathcal{R}f = +\infty$. Pour pouvoir donner un sens à $\mathcal{R}f$, il faut modifier l'opérateur de Riesz dans le but de donner plus d'intégrabilité au noyau à l'infini. Etant donné que c'est un opérateur de convolution avec un noyau singulier K de la forme

$$K(x) = C \; P.V. \frac{x_j}{|x|^3},$$

l'idée consiste à donner plus de décroissance à l'infini au noyau, pour cela, on pose

$$\theta = \Lambda^s w$$

Dans ce cas,

$$u(\theta) = \mathcal{R}^\perp \theta = \mathcal{R}^\perp \Lambda^s w$$

L'opérateur $\mathcal{R}\Lambda^s$ est un opérateur de convolution avec un noyau singulier $\tilde{K}$ défini par

$$\tilde{K}(x) = \partial_j^\perp \frac{C_s}{|x|^{1+s}} = \frac{-C_s(1+s)}{|x|^{2+s}} \frac{x_j^\perp}{|x|}.$$

où $x^\perp = (-x_2, x_1)$.

C'est la raison pour laquelle on ne supposera pas que $\theta_0 \in L^2_{uloc}(\mathbb{R}^2)$ mais $\theta_0 \in \Lambda^s(\dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^2))$, avec $0 < s < 1$. Ainsi définie, $u(w) = \mathcal{R}^\perp \Lambda^s w$ à bien un sens lorsque $w \in \dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)$.

On peut montrer que pour toute donnée initiale $\theta_0 = \Lambda^s w_0 \in \Lambda^s(\dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^2))$ on a existence de solutions faibles globales. Plus précisément, on va démontrer le résultat suivant :

Théorème 3. *Supposons que $1/4 \leq s < 1$, et $\theta_0 \in \Lambda^s(\dot{H}^s_{uloc}) \cap L^\infty$, alors l'équation (SQG) possède au moins une solution faible $\theta = \Lambda^s w$ vérifiant pour tout $T < \infty$:*

$$\theta \in (L^\infty([0,T], L^2))_{uloc} \cap (L^2_t([0,T], \dot{H}^{1/2}))_{uloc}$$

et

$$w \in (L^\infty([0,T], \dot{H}^s))_{uloc} \cap (L^2_t([0,T], \dot{H}^{s+1/2}))_{uloc}.$$

De plus, pour tout $t \leq T$, on a l'estimation suivante :

$$\|w(x,t)\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)} \leq c\, e^{CT},$$

où c et C sont deux constantes positives ne dépendant que de $\|\theta_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ et $\|w_0\|_{\dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)}$

2.2 Espaces de Morrey et commutateurs

Le but de cette section est de rappeler les différentes définitions des espaces de Morrey-Campanato. Nous fixerons la norme qui sera principalement utilisée, on démontrera que cette norme est équivalente à une autre norme qu'il s'avérera être plus judicieux de choisir dans certains cas. En outre, nous démontrerons un lemme de continuité d'un commutateur sur $L^p_{uloc}(\mathbb{R}^2)$.

On commence par la définition des espaces $L^p_{uloc}(\mathbb{R}^2)$. Ces espaces appartiennent à une classe plus large d'espaces : les espaces de Morrey-Campanato non homogènes. Ils sont définis par la norme suivante :

$$M^p_q(\mathbb{R}^2) = \left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^2) \mid \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \sup_{0<R<1} R^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}} \|f\|_{L^q(B(x,R))} < \infty \right\}$$

Où $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Notons que pour $p = q$ on retrouve les espaces $L^p_{uloc}(\mathbb{R}^2)$. Notons aussi que la version inhomogène de ces espaces s'obtient en prenant le sup sur tout $R \in]0, +\infty[$ au lieu de $0 < R < 1$. Dans la suite, on utilisera la définition suivante des espaces $L^p_{uloc}(\mathbb{R}^2)$:

Définition 1. *On fixe une fonction test positive $\phi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ vérifiant*

$$\begin{cases} \phi_0(x) &= 1 \text{ if } |x| \leq 2 \\ \phi_0(x) &= 0 \text{ if } |x| \geq 3. \end{cases}$$

Dans la suite, on définira l'ensemble des translations de ϕ_0 comme $B_{\phi_0} = \{\phi_0(x-k), k \in \mathbb{Z}^2\}$, on notera cet ensemble simplement B ou B_{ϕ_0}. Nous utiliserons aussi les fonctions $\phi_k(x) \equiv \phi_0(x-k)$. Dans toute la suite, pour toute fonction $f_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ nous utiliserons la notation $f_k(x) = f_0(x-k)$ où généralement f_0 sera une certaine fonction ϕ_0, ψ_0, η_0...etc qui sera égale à 1 sur le support de f_0.

Remarque 3. *Supposons que $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p_{uloc}(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$ et si la norme suivante est finie*

$$\|f\|_{L^p_{uloc}(\mathbb{R}^2)} = \sup_{\phi \in B_{\phi_0}} \|\phi f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

Nous utiliserons aussi les équivalences de normes suivantes :

$$\|f\|^p_{L^p_{uloc}(\mathbb{R}^2)} \approx \sup_{k \in \mathbb{Z}^2} \int_{k+[0,1]^2} |f(x)|^p \, dx \approx \sup_{k \in \mathbb{Z}^2} \|\phi_0(x-k) f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \approx \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^2} \|\phi_0(x-x_0) f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

En particulier, la norme équivalente suivante

$$\|f\|^p_{L^p_{uloc}(\mathbb{R}^2)} \approx \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^2} \|\phi_0(x-x_0) f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

est invariante par translation et permet de montrer le lemme suivant

Lemme 1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ et $g \in L^p_{uloc}(\mathbb{R}^2)$ alors le produit de convolution est bien défini presque partout, et on a $\|f * g\|_{L^p_{uloc}(\mathbb{R}^2)} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p_{uloc}}$*

Preuve. Comme il est mentionné dans [Bass], en posant $K = x_0 + [0,1]^2$, et en choisissant la norme équivalente qui est invariante par translation en espace il suffit d'écrire :

$$\left\| \int |f(y) g(x-y)| \, dy \right\|_{L^p(K)} \leq \int |f(y)| \|g(x-y) \mathbb{1}_{x \in K}\|_{L^p_x} \, dy \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p_{uloc}}$$

$\square$

Ce type d'inégalité traduisant la stabilité par convolution avec L^1 se généralise en fait à tout espace de Banach dont la norme est invariante par translation (voir [PGLR]).

Tout au long de ce chapitre, nous utiliserons une fonction test ψ construite de la façon suivante. On introduit une fonction test positive ψ_0 à support dans $[-4,4]^2$ telle que $\psi_0 \geq 0$ et

$$\begin{cases} \psi_0(x) & = 1 \text{ if } |x| \leq 3 \\ \psi_0(x) & = 0 \text{ if } |x| \geq 4 \end{cases}$$

Ensuite on construit l'ensemble des translations de ψ_0 :

$$B_{\psi_0} = \{\psi_0(x - x_0), \; x_0 \in \mathbb{Z}^2\}$$

On définit alors $\psi_k(x) = \psi_0(x-k)$ avec $k \in \mathbb{Z}^2$. Remarquons que, par construction, la fonction ψ_k est égale à 1 dans un voisinage du support de ϕ_k.

Nous noterons aussi $A \lesssim B$ si A est plus petit que B à une constante multiplicative près pouvant être différente d'une ligne à l'autre. La constante positive C qui apparaîtra dans les estimations sera aussi éventuellement différente d'une ligne à l'autre. Ces constantes ne dépendront que de quantités contrôlées.

Les espaces de Sobolev sur $\mathbb{R}^n$ peuvent se définir à l'aide du Laplacien fractionnaire. Avant d'énoncer le lemme, rappelons que le Laplacien fractionnaire est défini sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\Lambda^s f = c_{n,s} V.P. \int \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|^{n+s}}\, dy$$

où $c_{n,s}$ est une constante positive. Nous pouvons maintenant énoncer le lemme

Lemme 2. *Si $0 < s < 1$ alors, la norme :*

$$N(f) \;\; = \;\; c_{n,s} \left(\int |f(x)|^2 \, dx + \int \int \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} \, dx\, dy \right)^{1/2}$$

est finie sur $H^s(\mathbb{R}^n)$, de plus, cette norme est équivalente à la norme usuelle de $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. En utilisant le théorème de Fubini on a

$$\int \int \frac{|f(x+y) - f(y)|^2}{|x|^{n+2s}} \, dx\, dy = \int \frac{1}{|x|^{n+2s}} \, dx \int |f(x+y) - f(y)|^2 \, dy \qquad (2.1)$$

Posons $\Phi_x(y) = f(x+y)$ ainsi $\widehat{\Phi_x(y)} = \hat{f}(\xi).e^{-\mathrm{i}\xi x}$. Par la formule de Plancherel nous avons

$$\int |f(x+y) - f(y)|^2 \, dy = c_n \int |e^{-\mathrm{i}\xi x} - 1|^2 |\widehat{f(\xi)}|^2 \, d\xi$$

où $c_n = (2\pi)^{-n}$. En remplaçant dans (2.1) on trouve

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{|x|^{n+2s}} \, dx \int |f(x+y) - f(y)|^2 \, dy &= c_n \int \frac{1}{|x|^{n+2s}} \, dx \int |e^{-\mathrm{i}\xi x} - 1|^2 |\widehat{f(\xi)}|^2 \, d\xi \\ &= c_n \int \frac{|e^{-\mathrm{i}\xi x} - 1|^2}{|x|^{n+2s}} \, dx \int |\widehat{f(\xi)}|^2 \, d\xi \end{aligned}$$

Posons $G(\xi) := c_n \displaystyle\int \frac{|e^{-\mathrm{i}\xi x} - 1|^2}{|x|^{n+2s}} \, dx$, il est facile de voir que la fonction G est finie, positive, invariante par rotation, et homogène de degré $2s$, donc $G(\xi) = c_{n,s}|\xi|^{2s}$ où $c_{n,s}$ est une constante positive qui ne dépend que de s et de la dimension n. Donc,

$$\int \int \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} \, dx\, dy = c_{n,s} \int |\xi|^{2s} |\widehat{f(\xi)}|^2 \, d\xi$$

□

Remarque 4. *La constante $c_{n,s}$ peut-être explicitement calculée, elle vaut*

$$c_{n,s} = \frac{4}{s}\pi^{\frac{n}{2}+s}\frac{\Gamma(1-\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{n+s}{2})}$$

Une démonstration détaillée de cette équivalence de norme (connue aussi sous le nom de formule de Aronszajn-Smith) se trouve dans le très récent article [Beck] (voir formule 42 page 18 et 19). Une démonstration de cette équivalence se trouve aussi dans le livre [BCD] (voir prop 1.37 p 28) sans le calcul exact de $c_{n,s}$. En pratique dans les estimations, la constante importe peu, le plus important étant qu'elle soit positive.

Le lemme précédent permet de définir l'espace $H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)$, où $s \in \mathbb{R}$, de la façon suivante :

Définition 2. *On dit que $f \in H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si $f \in H^s_{loc}(\mathbb{R}^2)$ et si la norme suivante est finie :*

$$\|f\|^2_{H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)} = \sup_{\phi\in B_\phi} \|\phi f\|_{H^s}$$

Remarque 5. *Il est facile de voir que cette définition ne dépend pas du choix de la fonction test choisie ϕ. Rappelons que $f \in \Lambda^s\ (\dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^2))$ s'il existe $g \in \dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)$ telle que $f = \Lambda^s g$. Il est important aussi de rappeler la définition des normes $(L^2_T\dot{H}^s)_{uloc}$ et $(L^\infty_T\dot{H}^s)_{uloc}$ avec $s \in [0,1]$.*

$$\begin{aligned}
\|w\|^2_{(L^2_T\dot{H}^s)_{uloc}} &= \sup_{\phi\in B}\int_0^T\int |\Lambda^s(\phi(x)w(x,s))|^2\,dx\,ds < \infty \\
\|w\|^2_{(L^\infty_T\dot{H}^s)_{uloc}} &= \sup_{t\in[0,T]}\sup_{\phi\in B}\int |\Lambda^s(\phi(x)w(x,t))|^2\,dx < \infty
\end{aligned}$$

Dans la suite, nous noterons :

$$A_\phi(w) = \int\left(\frac{|w|^2}{2}\phi + \frac{|\Lambda^s w|^2}{2}\phi\right)dx \quad \text{et} \quad A(w) = \int\left(\frac{|w|^2}{2} + \frac{|\Lambda^s w|^2}{2}\right)dx.$$

Le lemma suivant traduit le fait que le calcul de la norme peut s'effectuer indépendamment de la position de la fonction test positive ϕ, nous l'énonçons dans l'espace $\mathbb{R}^n$:

Proposition 1. *Supposons $0 < s < 1$, les normes suivantes sont équivalentes sur $H^s_{uloc}(\mathbb{R}^n)$:*

– $\|w\|_a = \sup_{\phi\in B}\{A_\phi(w) < \infty\}$

– $\|w\|_b = \sup_{\phi\in B}\{A(w\phi) < \infty\}$

Preuve.

Pour simplifier, on suppose que $0 < \phi < 1$, alors $\dfrac{|w\phi|^2}{2} \leq \dfrac{|w|^2}{2}\phi$ et donc

$$\sup_{\phi\in B}\int \frac{|w\phi|^2}{2}\,dx \leq \sup_{\phi\in B}\int \frac{|w|^2}{2}\phi\,dx$$

Montrons l'inégalité inverse. Supposons qu'on contrôle le $\sup_{\phi\in B}\int \dfrac{|w|^2}{2}\phi\,dx$. On pose $\eta^2(x) = \phi(x)$, donc

$$\sup_{\phi\in B}\int \frac{|w|^2}{2}\phi\,dx \leq \sup_{\eta^2\in B_{\eta^2}}\int \frac{|w\eta|^2}{2}\,dx$$

D'où l'équivalence de norme

$$\|w\|_{L^2_{uloc}} \approx \sup_{\phi\in B}\int \frac{|w|^2}{2}\phi\,dx \approx \sup_{\phi\in B}\int \frac{|w\phi|^2}{2}\,dx$$

La deuxième partie constiste à montrer que si $\Lambda^s(\phi w) \in L^2$ alors $\phi\Lambda^s w \in L^2$ et inversement. Tout au long de ce chapitre, nous utiliserons le commutateur entre Λ^s et une fonction ϕ :

$$[\Lambda^s, \phi]f = \Lambda^s(\phi f) - f\Lambda^s\phi.$$

Donc pour tout $\phi \in B_{\phi_0}$ et tout $\psi \in B_{\psi_0}$ (rappelons que, par construction, $\psi_k(x) = \psi_0(x-k) = 1$ sur tout voisinage du support de $\phi_k(x) = \phi_0(x-k)$, et ce pour tout $k \in \mathbb{Z}^2$) on a :

$$\psi[\Lambda^s, \phi]w + (1-\psi)[\Lambda^s, \phi]w = \Lambda^s(\phi w) - \phi\Lambda^s w$$

Le lemme suivant nous permet de terminer la preuve.

Lemme 3. *L'opérateur $T_\phi w$ défini par*

$$\begin{array}{rlcl} T_\phi : & L^2_{uloc}(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & L^2_{uloc}(\mathbb{R}^n) \\ & w & \longmapsto & [\Lambda^s, \phi]w \end{array}$$

est continu.

Preuve. Pour démontrer ce fait, on écrit

$$\begin{aligned}
|[\Lambda^s, \phi]w| &\leq C_{n,s}\int \frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|^{n+s}}|w(y)|\ dy\\
&\leq C_{n,s}\int \frac{\min\left(\|\phi\|_\infty, \|\nabla\phi\|_{L^\infty}|x-y|\right)}{|x-y|^{n+s}}|w(y)|\ dy\\
&\leq C_{n,s}\int \frac{\min\left(1, 2|x-y|\right)}{|x-y|^{n+s}}|w(y)|\ dy\\
&= (A*|w|)(x)
\end{aligned}$$

où $A(x) = C_{n,s}\dfrac{\min(1,2|x|)}{|x|^{n+s}}$. Si $|x|<1$ alors $A(x) = \dfrac{2C_{n,s}}{|x|^{n-1+s}} \in L^1$ et comme $|w| \in L^2_{uloc}(\mathbb{R}^n)$ par convolution on en déduit que $A*|w| \in L^2_{uloc}(\mathbb{R}^n)$.
Si $|x|>1$ dans ce cas $A(x) = \dfrac{2C_{n,s}}{|x|^{n+s}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et donc $A*|w| \in L^2_{uloc}(\mathbb{R}^n)$ d'où le lemme.

Finalement, $\psi[\Lambda^s,\phi]w \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Concernant le terme $(1-\psi)[\Lambda^s,\phi]w$, il est facile de voir que :

$$\begin{aligned}
(1-\psi)[\Lambda^s,\phi]w &= (1-\psi)\Lambda^s(\phi w) - (1-\psi)\phi\Lambda^s w\\
&= (1-\psi)\left(C_s\frac{\mathbb{1}_{|x|\geq 1}}{|x|^{n+s}} * w\phi\right)
\end{aligned}$$

Puisque le noyau $\dfrac{C_s\mathbb{1}_{|x|\geq 1}}{|x|^{n+s}}$ est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, et comme $w\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, par convolution, on obtient que $(1-\psi)[\Lambda^s,\phi]w \in L^2(\mathbb{R}^n)$, ceci termine la preuve de la proposition.

□

2.3 L'équation (SQG) critique en $w = \Lambda^{-s}\theta$

L'objectif étant de donner plus d'oscillations à θ, pour cela on pose $\theta = \Lambda^s w = (-\Delta)^{s/2}w$ et on suppose que $w \in H^s_{uloc}$. Afin de pouvoir utiliser le principe du maximum, on supposera aussi que $\theta \in L^\infty$. Ainsi, l'équation se réécrit de la façon

$$\Lambda^s(\partial_t w) = \nabla\cdot\left(\Lambda^s w(\mathcal{R}^\perp\Lambda^s w)\right) - \Lambda^{s+1}w$$

Et donc

$$\partial_t w = \left(\Lambda^{-s}\nabla\right)\cdot\left(\Lambda^s w(\mathcal{R}^\perp\Lambda^s w)\right) - \Lambda w \tag{2.2}$$

L'équation que nous allons étudier tout au long de ce chapitre est la suivante :

$$(\widetilde{SQG}) : \begin{cases} \partial_t w = \big(\Lambda^{-s}\nabla\big) \cdot \big(\Lambda^s w(\mathcal{R}^\perp \Lambda^s w)\big) - \Lambda w \\ \nabla.\mathcal{R}^\perp \Lambda^s w = 0 \end{cases}$$

Remarquons que la donnée initiale vérifie la condition :

$$\theta_0(x) = \Lambda^s w_0 \in \Lambda^s(\dot{H}^s_{uloc}) \cap L^\infty.$$

Comme d'habitude, on doit s'assurer que l'équation $(\widetilde{SQG})$:

$$\partial_t w = \Lambda^{-s}\nabla \cdot \Lambda^s w(\mathcal{R}^\perp \Lambda^s w) - \Lambda w$$

a un sens pour $w \in L^\infty([0,T], \dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^2))$ et $\Lambda^s w \in L^\infty([0,T], L^\infty(\mathbb{R}^2))$ où $T > 0$. Si $w \in L^\infty([0,T], H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2))$ alors Λw a un sens dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ et $\Lambda^s w \in L^\infty([0,T], L^2_{uloc}(\mathbb{R}^2))$. Concernant le terme non linéaire :

$$\Lambda^{-s}\nabla \cdot \Lambda^s w(\mathcal{R}^\perp \Lambda^s w)$$

On commence par étudier l'opérateur d'intégrale singulière $\mathcal{R}^\perp \Lambda^s$. Comme

$$\mathcal{R}^\perp \theta = \nabla^\perp \Lambda^{-1}\theta = \nabla^\perp \Lambda^{s-1} w = (-\partial_2 \Lambda^{s-1} w, \partial_1 \Lambda^{s-1} w)$$

En utilisant le fait que le noyau de convolution de l'opérateur $\Lambda^{s-1} w$ est défini par $K(x) = \dfrac{C_s}{|x|^{1+s}}$, on en déduit que le noyau $\tilde{K}$ de u_R est donné par :

$$\tilde{K}(x) = \partial_j^\perp \frac{C_s}{|x|^{1+s}} = \frac{-C_s(1+s)}{|x|^{2+s}} \frac{x_j^\perp}{|x|}.$$

Soit $\alpha \in \mathcal{C}_0^\infty$ une fonction continue à support compact telle que, $\alpha(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ et 0 si $|x| \geq 2$. En écrivant,

$$u_R = \alpha \tilde{K} * w + (1-\alpha)\tilde{K} * w$$

Pour $|x| \leq 1$, on a $\tilde{K}\alpha \in \mathcal{E}'$ et $w \in L^2_{uloc} \subset \mathcal{D}'$ et donc la convolution a un sens. Loin de l'origine, on remarque que $(1-\alpha)\tilde{K} * \theta \in L^1 * L^2_{uloc} \subset \mathcal{D}'$.

L'idée de la preuve du théorème 3 est classique. Elle est basée sur l'étude de l'équation tronquée et un passage à la limite. Comme d'habitude dans ce genre de démonstration, il est important d'utiliser des lois de conservations. Dans le cas de l'équation quasi-géostrophique, la conservation des normes L^p (avec $p \in [1, \infty]$) facilite grandement les calculs.
En posant $\theta_0 = \Lambda^s w$ et en supposant que $w_0 \in H^s_{uloc}(\mathbb{R}^n)$ et $\theta_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ on peut montrer que $w_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, c'est l'objet du prochain lemme

Lemme 4. *Si $w_0 \in H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)$ et $\theta = \Lambda^s w \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ alors $w_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$*

Preuve. On décompose l'opérateur Λ^s en basses et hautes fréquences. Notons S_0 les basses fréquences, alors

$$w = \Lambda^{-s}(Id - S_0)\Lambda^s w_0 + S_0 w_0$$

Comme l'opérateur $\Lambda^{-s}(Id - S_0)$ est continu de L^∞ dans L^∞ alors $\Lambda^{-s}(Id - S_0 w_0)\Lambda^s w_0 \in L^\infty$. De plus, comme $H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)$ est un espace de Banach invariant par translation, on en déduit que $S_0 w_0 \in L^\infty$.

$\square$

2.4 Rappel de quelques résultats d'existence globale dans le cas critique

Dans cette section, nous énoncerons les résultats connus que nous utiliserons dans la preuve du théorème principal. Rappelons que l'existence de solutions faibles a été démontrée par Resnick dans [Res]. Il démontre que dans la cas d'une donnée $\theta_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ il exite au moins une solution faible vérifiant $\theta \in L^\infty L^2 \cap L^2 H^{1/2}$. Nous utiliserons aussi le résultat d'existence globale de Abidi et Hmidi [AH], ces derniers démontrent qu'il existe une unique solution lorsque la donnée est dans un espace de Besov critique, l'énoncé est le suivant :

Théorème 9 (Abidi and Hmidi). *Supposons que $\theta_0 \in \dot{B}^0_{\infty,1}$, alors il existe une unique solution globale θ solution de l'équation (SQG), de plus :*

$$\theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+;\, \dot{B}^0_{\infty,1}) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}_+;\, \dot{B}^1_{\infty,1}).$$

Remarque. Il est important de souligner que l'espace $\dot{B}^0_{\infty,1}$ n'est pas l'espace de Besov usuel (bien que par abus de notation nous conservions l'écriture usuelle) mais l'adhérence de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ dans l'espace de Besov usuel, ceci permet d'exclure les fonctions périodiques.

Nous utiliserons aussi le principe du maximum pour (SQG) démontré par Resnick dans [Res], puis par D. Córdoba et A. Córdoba dans [CC], dont nous rappelons l'énoncé :

Lemme 5. *Soit θ une solution régulière satisfaisant $\partial_t\theta + u.\nabla\theta + \Lambda^\alpha\theta = 0$ alors, pour tout $p \in [2, +\infty)$, et pour tout $t \geq 0$*

$$\|\theta\|^p_{L^p} + 2\int_0^t \int |\Lambda^{\alpha/2}(|\theta|^{p/2})|^2 \, dx \, ds \leq \|\theta_0\|^p_{L^p}$$

et,

$$\|\theta(t)\|_{L^\infty} \leq \|\theta_0\|_{L^\infty}$$

Preuve. Voir le Corollaire 2.6 de l'article [CC]

Nous utiliserons aussi le lemme suivant :

Lemme 6. *Supposons que* $0 \leq \alpha \leq 2$, *alors pour toute fonction* g *convexe, on a l'inégalité ponctuelle suivante :*

$$\Lambda^\alpha(g(\theta)) \leq g'(\theta)\Lambda^\alpha(\theta)$$

Preuve. Voir la prop 2.3 de l'article [CC]

2.5 L'équation tronquée et régularisée

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ une fonction positive, telle que $\chi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ et 0 si $|x| \geq 2$. Pour $R > 0$, on introduit la fonction $\chi_R(x) \equiv \chi(x/R)$. Ainsi construite, χ_R est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ et vérifie pour tout $R > 0$,

$$\begin{cases} \chi_R(x) & = 1 \text{ si } |x| \leq R \\ \chi_R(x) & = 0 \text{ si } |x| \geq 2R \end{cases}$$

On définit la condition initiale tronquée $\theta_{0,R}$ par

$$\theta_{0,R} = \Lambda^s w_{0,R} = \Lambda^s(w_0\chi_R)$$

Nous verrons qu'elle est dans l'espace

$$\theta_{0,R} = \Lambda^s(w\chi_R) \in \Lambda^s(H^s(\mathbb{R}^2)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2) \subset L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$$

Dans les estimations futures, nous aurons besoin d'être plus régulier que $L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty$ (en fait, on doit être au moins de régularité H^1). C'est pourquoi nous avons besoin de régulariser la donnée initiale tronquée. Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, $supp \rho \subset [-1,1]^2$ et $\int_{\mathbb{R}^2} \rho = 1$. On définit $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}\rho(\frac{x}{\varepsilon})$. Comme la donnée intiale $\theta_0 \in \Lambda^s(\dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ alors

$$\theta_{0,R,\varepsilon} \in \bigcap_{k \geq 0} H^k \subset H^2 \subset \dot{B}^0_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$$

Par conséquent, en utilisant le résultat d'existence globale obtenu par Abidi et Hmidi [AH] on peut affirmer qu'il existe au moins une solution faible w_R de l'équation tronquée et régularisée $(SQG)_{R,\varepsilon}$ vérifiant

$$\theta_{R,\epsilon} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+;\, \dot{B}^0_{\infty,1}) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+;\, \dot{B}^1_{\infty,1}).$$

On appelera équation tronquée et régularisée, et nous la noterons $(SQG)_{R,\varepsilon}$, l'équation tronquée avec donnée initiale tronquée et régularisée. Elle est la suivante :

$$(SQG)_{R,\varepsilon} : \begin{cases} \partial_t w_{R,\varepsilon} = \big(\Lambda^{-s}\nabla\big) \cdot \big(\Lambda^s w_{R,\varepsilon}\ \mathcal{R}^\perp \Lambda^s w_{R,\varepsilon}\big) - \Lambda w_{R,\varepsilon} \\ \nabla.\ \mathcal{R}^\perp \Lambda^s w_{R,\varepsilon} = 0 \\ \theta_{0,R,\varepsilon} = \Lambda^s(w_0\chi_R) * \rho_\varepsilon \end{cases}$$

Avant d'établir l'inégalité d'énergie, on doit montrer que la donnée initiale est bornée par rapport aux paramètres R et de ε.

2.6 Bornes pour la condition initiale

Pour le passage à la limite dans la donnée initiale nous avons besoin de compacité, dans le lemme suivant on montre que $\theta_{0,R,\varepsilon}$ est bornée dans L^∞ et que la borne ne dépend pas de R et de ε :

Lemme 7. *Si $\theta_0 \in L^\infty$ et $w_0 \in \dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)$ alors* $\sup\limits_{R>1,\varepsilon>0} \|\theta_{0,R,\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} < \infty$

Preuve. En écrivant le commutateur, on a :

$$\theta_{0,R,\varepsilon} = \Lambda^s(w_0\chi_R) * \rho_\varepsilon = \left(\chi_R\Lambda^s w_0\ + \int \frac{w_0(y)(\chi_R(x) - \chi_R(y))}{|x-y|^{2+s}}\, dy\right) * \rho_\varepsilon$$

Comme $\Lambda^s w_0 \in L^\infty$ alors $\chi_R\Lambda^s w_0 \in L^\infty$. On doit vérifier que l'intégrale comprise dans la parenthèse est bornée dans L^∞ indépendamment de R. Pour cela, on coupe l'intégrale en deux morceaux et on utilise l'inégalité de Young ($L^\infty * L^1 \subset L^\infty$), on obtient que pour tout $R > 1$:

$$\begin{aligned} \int \frac{w_0(y)(\chi_R(x) - \chi_R(y))}{|x-y|^{2+s}} dy \ &= \int_{|x-y|<R} \frac{w_0(y)(\chi_R(x) - \chi_R(y))}{|x-y|^{2+s}} dy \\ &\quad + \int_{|x-y|>R} \frac{w_0(y)(\chi_R(x) - \chi_R(y))}{|x-y|^{2+s}} dy \\ &\leq \int_{|x-y|<R} \frac{w_0(y)\|\nabla\chi_R\|_{L^\infty}}{|x-y|^{1+s}}\, dy + 2\int_{|x-y|>R} \frac{w_0(y)\|\chi_R\|_{L^\infty}}{|x-y|^{2+s}}\, dy \\ &\leq \|\nabla\chi_R\|_{L^\infty} \int_{|y|<R} \frac{w_0(x-y)}{|y|^{1+s}}\, dy + 2\|\chi_R\|_{L^\infty} \int_{|y|>R} \frac{w_0(x-y)}{|y|^{2+s}}\, dy \end{aligned}$$

D'où,

$$\left\|\int \frac{w_0(y)(\chi_R(x) - \chi_R(y))}{|x-y|^{2+s}}\, dy\right\|_{L^\infty} \leq R^{-s}\|\nabla\chi\|_{L^\infty}\|w_0\|_{L^\infty} + 2R^{-s}\|\chi_R\|_{L^\infty}\|w_0\|_{L^\infty}$$

En utilisant encore une fois l'inégalité de Young et en prenant le sup sur $R > 1$ et $\varepsilon > 0$ on obtient

$$\sup_{R>1,\varepsilon>0} \|\theta_{0,R,\varepsilon}\|_{L^\infty} = \sup_{R>1,\varepsilon>0} \|\Lambda^s(w_0\chi_R)*\rho_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \sup_{R>1,\varepsilon>0} \|\theta_{0,R}\|_{L^\infty}\|\rho_\varepsilon\|_{L^1} \lesssim \sup_{R>1} \|\theta_{0,R}\|_{L^\infty}$$

□

On doit aussi montrer que $w_{0,R,\varepsilon}$ est bornée dans $H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)$.

Lemme 8. *Si* $\theta_0 \in L^\infty$ *et* $w_0 \in H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)$ *alors* $\sup\limits_{R>1,\varepsilon>0} \|w_{0,R,\varepsilon}\|_{H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)} < \infty$

Preuve. Il est équivalent de montrer que $\Lambda^s w_{0,R,\varepsilon} \in L^2_{uloc}$ uniformément par rapport à R et ε. Comme dans la preuve du lemme précédent, on écrit :

$$\Lambda^s(w_0\chi_R) * \rho_\varepsilon = \left(\chi_R \Lambda^s w_0 \ + C_s \int \frac{w_0(y)(\chi_R(x) - \chi_R(y))}{|x-y|^{2+s}}\, dy\right) * \rho_\varepsilon$$

Comme $w_0 \in H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)$ alors $\Lambda^s w_0 \in L^2_{uloc}$ et pour tout $R > 1$, on a que $\chi_R \Lambda^s w_{0,R} \in L^2_{uloc}$.
Pour le second terme, on écrit :

$$\begin{aligned}
\int \frac{w_0(y)(\chi_R(x) - \chi_R(y))}{|x-y|^{2+s}}\, dy \ &= \ \int_{|x-y|<R} \frac{w_0(y)(\chi_R(x) - \chi_R(y))}{|x-y|^{2+s}}\, dy \\
&\qquad + \int_{|x-y|>R} \frac{w_0(y)(\chi_R(x) - \chi_R(y))}{|x-y|^{2+s}}\, dy \\
&\leq \int_{|x-y|<R} \frac{\|\nabla \chi_R\|_{L^\infty} w_0(y)}{|x-y|^{1+s}}\, dy + 2\int_{|x-y|>R} \frac{\|\chi_R\|_{L^\infty} w_0(y)}{|x-y|^{2+s}}\, dy \\
&\leq R^{-s}\|\nabla \chi\|_{L^\infty} \int_{|y|<R} \frac{w_0(x-y)}{|y|^{1+s}}\, dy + \ 2\|\chi_R\|_{L^\infty} \int_{|y|>R} \frac{w_0(x-y)}{|y|^{2+s}}\, dy
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\left\| C_s \int \frac{w_0(y)(\chi_R(x) - \chi_R(y))}{|x-y|^{2+s}}\, dy \right\|_{L^2_{uloc}} \ \lesssim \ (R^{-s}\|\nabla \chi\|_{L^\infty} + 2\|\chi_R\|_{L^\infty})\|w\|_{L^2_{uloc}(\mathbb{R}^2)}$$

Où l'on a utilisé le fait que $w_0 \in H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)$ donc $w_0 \in L^2_{uloc}(\mathbb{R}^2)$ et $\mathbb{1}_{|y|<R} \dfrac{1}{|y|^{1+s}} \in L^1$ alors $\displaystyle\int \frac{w_0(y)}{|x-y|^{1+s}}\, dy \in L^2_{uloc}$. Concernant la seconde integrale, on remarque que $\mathbb{1}_{|y|>R} \dfrac{1}{|y|^{2+s}} \in L^1$ et comme $w_0 \in L^2_{uloc}$ par convolution $\displaystyle\int_{|y|>R} \frac{w_0(x-y)}{|y|^{1+s}}\, dy \in L^2_{uloc}$

Il reste à voir que :

$$\begin{aligned}
\sup_{R>1,\varepsilon>0} \|w_{0,R,\varepsilon}\|_{H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)} = \sup_{R>1,\varepsilon>0} \|w_{0,R} * \rho_\varepsilon\|_{H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)} \ &\leq \ \sup_{R>1,\varepsilon>0} \|w_{0,R}\|_{H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)} \|\rho_\varepsilon\|_{L^1} \\
&\lesssim \ \sup_{R>1} \|w_{0,R}\|_{H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)}
\end{aligned}$$

□

On peut maintenant montrer que w_R vérifie une inégalité d'énergie permettant d'avoir la compacité nécessaire au passage à la limite. La solution de l'équation (SQG) sera obtenue comme limite faible de $\theta_{R,\varepsilon}$ (lorsque $R \to +\infty$ et $\epsilon \to 0$).

2.7 Inégalité d'énergie et bornes uniformes

Dans cette section, on prouve le théorème suivant

Théorème 4. *Supposons que $1/4 \leq s \leq 1$. On a l'inégalité d'énergie suivante, pour tout $\gamma > 0$ et pour tout ϕ_1 dans B_{ϕ_1} :*

$$\partial_t A_\phi(w_R) + \int \phi\theta_R\Lambda\theta_R \, dx \leq (C + \frac{2}{\gamma}) \, \|w_R\|^2_{H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)} + \frac{\gamma}{2}\|\phi_1 w_R\|^2_{\dot{H}^{s+1/2}}$$

où C est une constante positive ne dépendant que de $\|\theta_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ et $\|w_0\|_{H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)}$.

Preuve. Soit $w_{R,\epsilon}$ une solution faible de l'équation $(SQG)_{R,\epsilon}$. Rappelons que

$$\|w_{R,\epsilon}\|^2_{H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)} = \sup_{\phi\in B} \int \left(\frac{|w_{R,\epsilon}|^2}{2}\phi + \frac{|\Lambda^s w_{R,\epsilon}|^2}{2}\phi \right) \, dx = \sup_{\phi\in B} A_\phi(w_{R,\epsilon}).$$

On a

$$\begin{aligned} \partial_t A_\phi(w_{R,\epsilon}) &= \int \partial_t \left(\frac{|w_{R,\epsilon}|^2}{2}\phi \; + \; \frac{|\Lambda^s w_{R,\epsilon}|^2}{2}\phi \right) \, dx \\ &= \int w_{R,\epsilon}\phi\partial_t w_{R,\epsilon} \; + \; \phi\Lambda^s w_{R,\epsilon}\Lambda^s(\partial_t w_{R,\epsilon}) \, dx \end{aligned}$$

On doit justifier que la première égalité à un sens dans $\mathcal{D}'(0,T)$. Remarquons que, comme $w_{R,\epsilon}$ est plus régulière que $\theta_{R,\epsilon}$, il suffit de montrer que le terme

$$\int \phi\theta_{R,\epsilon}\partial_t\theta_{R,\epsilon} \, dx$$

a un sens. On commence par étudier la régularité de $\partial_t\theta_{R,\epsilon}$, en utilisant l'équation on a :

$$\partial_t\theta_{R,\epsilon} = -\nabla.(\theta_{R,\epsilon} \; u_{R,\epsilon}) - \Lambda\theta_{R,\epsilon}$$

Comme $\theta_{R,\epsilon} \in L^2\dot{H}^{1/2}$ alors $\Lambda\theta_{R,\epsilon} \in L^2\dot{H}^{-1/2}$, de plus, par continuité des transformées de Riesz dans $L^2\dot{H}^{1/2}$ on en déduit que $u_{R,\epsilon} \in L^2\dot{H}^{1/2}$. On aimerait donc avoir $u_R\theta_R \in L^2\dot{H}^{1/2}$. Comme on a :

$$\|u_{R,\epsilon}\theta_{R,\epsilon}\|_{\dot{H}^{1/2}} \lesssim \|u_{R,\epsilon}\|_{L^\infty}\|\theta_{R,\epsilon}\|_{\dot{H}^{1/2}} + \|u_{R,\epsilon}\|_{\dot{H}^{1/2}}\|\theta_{R,\epsilon}\|_{L^\infty}.$$

Il suffit donc de montrer que $u_{R,\epsilon} \in L^\infty L^\infty$. En effet, en utilisant de résultat de Abidi et Hmidi, on en déduit que la solution est dans l'espace $L^\infty\dot{B}^0_{\infty,1}$.

Comme les transformées de Riesz envoient continûment l'espace $L^\infty \dot{B}^0_{\infty,1}$ dans lui même, et grâce à l'injection $L^\infty \dot{B}^0_{\infty,1} \hookrightarrow L^\infty L^\infty$, on obtient que $u_{R,\epsilon} \in L^\infty L^\infty$. Par conséquent, $u_{R,\epsilon}\Lambda^s w_{R,\epsilon} \in L^2 \dot{H}^{1/2}$. Notons que sans régulariser la donnée initiale il est difficile de donner un sens au calcul précédent étant donné que les transformées de Riesz ne sont pas continues sur $L^\infty L^\infty$. Donc, on a $\nabla.(\theta_{R,\epsilon}\, u_{R,\epsilon}) \in L^2 \dot{H}^{-1/2}$. D'où $\partial_t \theta \in L^2 \dot{H}^{-1/2}$. Et comme $\phi\theta_{R,\epsilon} \in L^2 \dot{H}^{1/2}$, on en déduit que le terme $\int \phi\theta_{R,\epsilon}\partial_t\theta_{R,\epsilon}\, dx$ a bien un sens et on a :

$$\partial_t A_\phi(w_{R,\epsilon}) = \int w_{R,\epsilon}\phi\partial_t w_{R,\epsilon}\, dx + \int \phi\Lambda^s w_{R,\epsilon}\Lambda^s(\partial_t w_{R,\epsilon})\, dx. \tag{2.3}$$

Comme

$$\partial_t w_{R,\epsilon} = -\left(\Lambda^{-s}\nabla\right)\cdot\left(\Lambda^s w_{R,\epsilon}(\mathcal{R}^\perp\Lambda^s w_{R,\epsilon})\right) - \Lambda w_{R,\epsilon}$$

On obient quatre termes :

$$\begin{aligned}\partial_t A_\phi(w_{R,\epsilon}) &= -\int w_{R,\epsilon}\phi\Lambda^{-s}\nabla.(u\Lambda^s w_{R,\epsilon})\, dx - \int w_{R,\epsilon}\phi\Lambda w_{R,\epsilon}\, dx \\ &- \int \phi\Lambda^s w_{R,\epsilon}\nabla.(u_{R,\epsilon}\Lambda^s w_{R,\epsilon})\, dx - \int \phi\Lambda^s w_{R,\epsilon}\Lambda^{s+1}w_{R,\epsilon}\, dx\end{aligned}$$

On estime les trois termes du membre de droite de l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}\partial_t A_\phi(w_{R,\epsilon}) + \int \phi\Lambda^s w_{R,\epsilon}\Lambda^{s+1}w_{R,\epsilon}\, dx = &- \int w_{R,\epsilon}\phi\Lambda^{-s}\nabla.(u\Lambda^s w_{R,\epsilon})\, dx \\ &- \int \phi\Lambda^s w_{R,\epsilon}\nabla.(u_{R,\epsilon}\Lambda^s w_{R,\epsilon})\, dx \\ &- \int \phi w_{R,\epsilon}\Lambda w_{R,\epsilon}\, dx\end{aligned}$$

Dans les estimations des deux premiers termes, on va utiliser le fait que $u_{R,\epsilon}$ est contrôlé dans l'espace $L^\infty L^2_{uloc}$, c'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 9. *$u_{R,\epsilon}$ est bornée dans $L^\infty L^2_{uloc}$ et on a l'estimation :*

$$\|u_{R,\epsilon}\|_{L^\infty L^2_{uloc}} \lesssim \|w_{R,\epsilon}\|_{L^\infty H^s_{uloc}}$$

Preuve. Il est équivalent de montrer que, pour tout $\psi \in B_\psi$, $\psi u_{R,\epsilon}$ est contrôlé dans $L^\infty L^2$ indépendamment des paramètres. Pour cela on divise $\psi u_{R,\epsilon}$ en deux parties :

$$\begin{aligned}\psi u_{R,\epsilon} = \psi\mathcal{R}^\perp\Lambda^s w_{R,\epsilon} &= \psi\mathcal{R}^\perp\Lambda^s(\phi w_{R,\epsilon}) + \psi\mathcal{R}^\perp\Lambda^s(1-\phi)w_{R,\epsilon} \\ &= (1) + (2)\end{aligned}$$

Comme $w_{R,\epsilon} \in (L^\infty H^s)_{uloc}$ alors $\phi w_{R,\epsilon} \in L^\infty H^s$ et $\Lambda^s(\phi w_{R,\epsilon}) \in L^\infty L^2$, par continuité de l'opérateur de Riesz sur $L^\infty L^2$ on en déduit que $\mathcal{R}^\perp \Lambda^s(\phi w_{R,\epsilon})$ est contrôlé dans l'espace $L^\infty L^2$ et donc (1) aussi. De plus, on a les inégalités :

$$\|\mathcal{R}^\perp \Lambda^s(\phi w_{R,\epsilon})\|_{L^\infty L^2} \leq \|\Lambda^s(\phi w_{R,\epsilon})\|_{L^\infty L^2} \leq \sup_{\phi \in B} \|\Lambda^s(\phi w_{R,\epsilon})\|_{L^\infty L^2} \leq \|w_{R,\epsilon}\|_{L^\infty H^s_{uloc}}$$

Notons $\tilde{K}$ le noyau de l'opérateur $\mathcal{R}^\perp \Lambda^s$. On a vu précédemment que le noyau de cet opérateur se comportait comme $\dfrac{C_s}{|x|^{2+s}}$ qui appartient donc à L^1 loin de l'origine. Comme $w_{R,\epsilon} \in L^\infty L^2_{uloc}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{R}^\perp \Lambda^s(1-\phi) w_{R,\epsilon}\|_{L^\infty L^2_{uloc}} &\leq \|\mathbb{1}_{x \in (supp \phi)^c} \tilde{K} * \phi w_{R,\epsilon}\|_{L^\infty L^2_{uloc}} \\
&\leq \|\mathbb{1}_{x \in (supp \phi)^c} \tilde{K}\|_{L^1} \|\phi w_{R,\epsilon}\|_{L^\infty L^2_{uloc}} \\
&\lesssim \|w_{R,\epsilon}\|_{L^\infty H^s_{uloc}}
\end{aligned}$$

□

Afin d'alléger les notations on omettra dans la suite d'écrire la dépendance par rapport à ϵ. Pour le premier terme,

$$-\int \Lambda^{-s} \nabla.(w_R \phi) u_R \Lambda^s w_R \, dx$$

Comme on dérive $(1-s)$ fois $w_R\phi \in L^2 H^{s+1/2}$ on aimerait intégrer par parties afin de partager les dérivées à un ordre rendant le contrôle possible. On doit *a priori* dériver le produit $u_R\theta_R$. Malheureusement on ne peut pas mettre de dérivées sur u_R étant donné que u_R ne peut pas être contrôlé dans un espace de Sobolev de régularité positive. En fait, un contrôle de u_R dans un espace de Sobolev de régularité positive supposerait que l'on puisse contrôler les basses fréquences de u_R ce qui est vraisemblablement sans espoir. En effet, si le contraire était possible, cela signifirait que, comme $\theta_R \in L^\infty L^\infty$ alors $u_R \in L^\infty BMO$ et donc on ne pas avoir un contrôle de ϕu_R car $\phi u_R \notin BMO$ (car BMO est un espace qui n'est défini que modulo les constantes). Comme $\phi w_R \in L^2 \dot{H}^{s+1/2}$ alors $\Lambda^{-s}\nabla.(w_R\phi) \in L^2 \dot{H}^{2s-1/2}$ on a donc besoin de la condition $2s - 1/2 > 0$ qui est équivalent à $1/4 \leq s \leq 1$. Dans ces conditions, on peut écrire par Hölder (en introduisant une fonction $\psi \in \mathcal{D}$, qui vaut 1 dans un voisinage du support de ϕ, et en écrivant $\psi = \psi_1^2$) et Young, on a, pour tout $\gamma > 0$

$$\begin{aligned}
-\int \Lambda^{-s}\nabla.(w_R\phi)\psi u_R \Lambda^s w_R \, dx &\leq \|\Lambda^{-s}\nabla.(w_R\phi)\|_{L^2_{uloc}} \|\psi_1 u_R\|_{L^2_{uloc}} \|\psi_1 \theta_R\|_{L^\infty} \\
&\lesssim \|\phi w_R\|_{\dot{H}^{1-s}} \|\psi_1 w_R\|_{\dot{H}^s} \|\theta_{0,R}\|_{L^\infty} \\
&\lesssim \|\phi w_R\|_{\dot{H}^{s+1/2}} \|\psi_1 w_R\|_{\dot{H}^s} \|\theta_{0,R}\|_{L^\infty} \\
&\lesssim \frac{\gamma}{2} \|\phi w_R\|^2_{\dot{H}^{s+1/2}} + \frac{1}{2\gamma} \|w_R\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}}
\end{aligned}$$

Comme le noyau de l'opérateur $\Lambda^{-s}\nabla$ est L^1 loin de l'origine et comme $u_R\Lambda^s w_R \in L^2_{uloc}$ (car $u_R \in L^2_{uloc}$ et $\Lambda^s w_R \in L^\infty$) on en déduit par Cauchy-Schwarz par le lemme 9,

$$-\int w_R\phi\Lambda^{-s}\nabla.((1-\psi)u_R\Lambda^s w_R)\,dx \lesssim \|w_R\phi\|_{L^2}\|u_R\|_{L^2_{uloc}} \lesssim \|w_R\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}}$$

Pour le deuxième terme on intègre par parties et on utilise le fait que u est de divergence nulle, on obtient :

$$\begin{aligned}
-\int \phi\Lambda^s w_R\nabla.(u_R\Lambda^s w_R)\,dx &= \int \nabla.(\phi\Lambda^s w_R).u_R\Lambda^s w_R\,dx \\
&= \int \phi\nabla(\Lambda^s w_R).u_R\Lambda^s w_R\,dx + \int \Lambda^s w_R\nabla\phi.u_R\Lambda^s w_R\,dx \\
&= \int \phi\Lambda^s w_R\nabla.(u_R\Lambda^s w_R)\,dx + \int \theta_R^2 u_R.\nabla\phi\,dx
\end{aligned}$$

D'où l'estimation,

$$\begin{aligned}
-\int \phi\Lambda^s w_R\nabla.(u\Lambda^s w_R)\,dx &= \frac{1}{2}\int \theta_R^2 u_R.\nabla\phi\,dx \\
&\lesssim \|\theta_R\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\|\nabla\phi\|_{L^\infty}\|\theta_R\|_{L^2_{uloc}(\mathbb{R}^2)}\|u_R\|_{L^2_{uloc}(\mathbb{R}^2)} \\
&\lesssim \|w_R\|^2_{H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)}
\end{aligned}$$

Remarque 6. *Sans régulariser la donnée initiale, on ne peut pas effectuer cette intégration par parties car $\nabla.(\phi\Lambda^s w_R) \in L^2\dot{H}^{-1/2}$ donc on doit avoir $u_R\Lambda^s w_R \in L^2\dot{H}^{1/2}$ et ceci n'est vérifié qu'après avoir régularisé.*

Concernant le dernier terme, on utilise la propriété suivante traduisant la décroissance de $|\Lambda\phi|$

Lemme 10. *Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ on a $|\Lambda\phi(x)| \leq \dfrac{C}{|x|^3}$ où C est une constante positive fixée.*

Preuve. Soit B_R la boule de $\mathbb{R}^2$ de rayon $R > 0$ centrée à l'origine. Supposons que $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ est telle que

$$\begin{cases} \phi(x) &= 1 \text{ on } B_R \\ \phi(x) &= 0 \text{ on } B^c_{R+1} \end{cases}$$

Si $x \in B^c_{R+2}$ alors

$$|\Lambda\phi(x)| \leq \int_{y\in B_R} \frac{|\phi(y)|}{|x-y|^3}\,dy \leq \frac{C}{|x|^3}$$

Si $x \in B_R$, et $y \in B^c_{R+2}$ alors par symétrie, ce cas est le même que le précédent. Maintenant, pour $x \in B_R$ et $y \in B_R$, on utilise la représentation suivante du Laplacien fractionnaire.

Lemme 11. *Si $s \in (0,1)$ alors pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\Lambda^s \phi = -\frac{1}{2}\int \frac{\phi(x+y)+\phi(x-y)-2\phi(x)}{|y|^{n+s}}\,dy \tag{2.4}$$

Cette formule se retrouve en faisant deux changements de variables ($z \leftarrow x-y$ puis $z \leftarrow -z$) et en remplaçant la variable muette z par y dans les deux dernières égalités.

$$\begin{aligned}\Lambda^s \phi = -P.V \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\phi(y)-\phi(x)}{|x-y|^{n+s}}\,dy \quad &= \quad -P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\phi(x+z)-\phi(x)}{|z|^{n+s}}\,dz \\ &= \quad P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\phi(x-z)-\phi(x)}{|z|^{n+s}}\,dz\end{aligned}$$

□

Afin de se débarasser de la singularité à l'origine, on utilise un developpement de Taylor à l'ordre 2. On obtient alors :

$$\frac{\phi(x+y)+\phi(x-y)-2\phi(x)}{|y|^3} \leq \frac{\|\nabla^2\phi\|_{L^\infty}}{|y|}$$

Comme le terme de droite est dans $L^1(B_R)$, on obtient le résultat voulu.

□

En utilisant l'inégalité de Córdoba et Córdoba appliquée à w_R, on obtient

$$-w_R\,\Lambda w_R \leq -\frac{1}{2}\Lambda(w_R^2).$$

Donc,

$$\begin{aligned}-\int \phi w_R \Lambda w_R\,dx \leq -\int \phi\Lambda(\theta_R^2)\,dx \quad &= \quad -\int \Lambda\phi\; w_R^2\,dx \\ &\leq \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \frac{1}{1+|k|^3}\int_{k+[-1,1]^2} |w_R|^2\,dx \\ &\lesssim \quad \|w_R\|^2_{L^2_{uloc}} \\ &\lesssim \quad \|w_R\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$-\int \phi w_R\;\Lambda w_R\,dx \leq C(\|\theta_0\|_{L^\infty},\phi)\;\|w_R\|^2_{H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)}$$

D'où, pour tout $\phi_1 \in B_{\phi_1}$ et pour tout $\gamma > 0$:

$$\partial_t A_\phi(w_{R,\epsilon}) + \int \phi\theta_R\Lambda\theta_R \, dx \leq (C + \frac{2}{\gamma}) \, \|w_{R,\epsilon}\|^2_{H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)} + \frac{\gamma}{2}\|\phi_1 w_R\|^2_{\dot{H}^{s+1/2}} \tag{2.5}$$

□

En intégrant (2.5) par rapport au temps $s \in [0,T]$ on obtient l'inégalité (2.6) suivante :

$$\begin{aligned} A_\phi(w_R(x,t)) + \int_0^T \int \phi\theta_R\Lambda\theta_R \, dx \, ds \leq A_\phi(w_{0,R}(x)) \quad &+ \quad \frac{\gamma}{2}\int \|\phi_1 w_R\|^2_{\dot{H}^{s+1/2}} \, ds \\ (2.6) \qquad\qquad &+ (C + \frac{2}{\gamma})\int_0^t \|w_R\|^2_{H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)} \, ds \end{aligned}$$

Le dernier terme du membre gauche peut se réécrire

$$\int_0^T \int \phi\theta_R\Lambda\theta_R \, dx \, ds = \int_0^T \int \Lambda^{1/2}\theta_R[\Lambda^{1/2},\phi]\theta_R \, dx \, ds + \int_0^T \int \phi|\Lambda^{1/2}\theta_R|^2 \, dx \, ds$$

L'inégalité (2.6) devient

$$\begin{aligned} A_\phi(w_R(x,T)) \quad &+ \quad \int_0^T \int \phi|\Lambda^{1/2}\theta_R|^2 \, dx \, ds \leq A_\phi(w_{0,R}(x)) \; + \frac{\gamma}{2}\int \|\phi_1 w_R\|^2_{\dot{H}^{s+1/2}} \, ds \\ &+ \quad (C + \frac{2}{\gamma})\int_0^t \|w_R\|^2_{H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)} \, ds + \left|\int_0^T \int \Lambda^{1/2}\theta_R[\Lambda^{1/2},\phi]\theta_R \, dx \, ds\right| \end{aligned}$$

Ensuite, on décompose l'intégrale apparaissant dans le dernier terme du membre de droite

$$\begin{aligned} \left|\int_0^T \int \Lambda^{1/2}\theta_R[\Lambda^{1/2},\phi]\theta_R \, dx \, ds\right| \quad &\leq \quad \left|\int_0^T \int \psi\Lambda^{1/2}\theta_R[\Lambda^{1/2},\phi]\theta_R \, dx \, ds\right| \\ &\quad + \left|\int_0^T \int (1-\psi)\Lambda^{1/2}\theta_R[\Lambda^{1/2},\phi]\theta_R \, dx \, ds\right| \\ &= \quad (1) + (2) \end{aligned}$$

Pour le premier, par l'inégalité de Hölder et Young on a, pour tout $\nu > 0$:

$$\begin{aligned} \left|\int_0^T \int \psi\Lambda^{1/2}\theta_R[\Lambda^{1/2},\phi]\theta_R \, dx \, ds\right| \quad &\leq \quad \int_0^T \|\psi\Lambda^{1/2}\theta_R\|_{L^2}\|\theta_R\|_{L^2_{uloc}} \, ds \\ &\leq \quad \frac{\nu}{2}\int_0^T \|\psi\Lambda^{1/2}\theta_R\|^2_{L^2} \, ds + \frac{1}{2\nu}\int_0^T \|\theta_R\|^2_{L^2_{uloc}} \, ds \end{aligned}$$

Pour le second terme, on utilise encore Hölder et Young pour obtenir que, pour tout $\eta > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int (1-\psi)\Lambda^{1/2}\theta_R[\Lambda^{1/2},\phi]\theta_R \; dx\; ds &= \int_0^T \int (1-\psi)\Lambda^{1/2}\theta_R \Lambda^{1/2}(\phi\theta_R)\; dx\; ds \\
&= \int_0^T \int \Lambda^{1/2}((1-\psi)\Lambda^{1/2}\theta_R)\phi\theta_R \; dx\; ds \\
&\leq \sum_{|k|>5} \frac{1}{|k|^{5/2}} \int_0^T \int_{k+[0,1]^2} \phi_k |\Lambda^{1/2}\theta_R||\phi\theta_R| \; dx\; ds \\
&\leq \frac{\eta}{2} \sum_{|k|>5} \frac{1}{|k|^{5/2}} \int_0^T \int_{k+[0,1]^2} \phi_k |\Lambda^{1/2}\theta_R|^2 \; dx\; ds + \frac{1}{2\eta}\int_0^T \|\theta_R\|^2_{L^2_{uloc}}\; ds
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
A_\phi(w_R(x,T)) + \int_0^T \int \phi |\Lambda^{1/2}\theta_R|^2 \; dx\; ds \;\; &\leq \;\; A_\phi(w_{0,R}(x)) \; + \frac{\nu}{2}\int_0^T \|\psi\Lambda^{1/2}\theta_R\|^2_{L^2}\; ds \\
&+ \;\; \frac{C\eta}{2}\int_0^T \int_{k+[0,1]^2} \phi_k |\Lambda^{1/2}\theta_R|^2 \; dx\; ds \\
&+ \;\; \frac{\gamma}{2}\int \|\phi w_R\|^2_{\dot{H}^{s+1/2}}\; ds \\
&+ \left(C + \frac{1}{2\gamma} + \frac{1}{2\nu} + \frac{1}{2\eta}\right)\int_0^t \|w_R\|^2_{H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)}\; ds
\end{aligned}$$

En prenant le sup sur $\phi \in B$, $\psi \in B_\psi$ et sur $k \in \mathbb{Z}^2$ puis en choisissant η, ν, γ suffisamment petits pour que la norme $L^2\dot{H}^{s+1/2}$ apparaissant à droite soit absorbée par celle de gauche, on obtient

$$\begin{aligned}
\|w_R(x,t)\|^2_{H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)} &\leq \|w_{0,R}(x)\|^2_{H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)} + C\int_0^t \|w_R(x,s)\|^2_{H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)}\; ds \\
&\leq \sup_{R>1} \|w_{0,R}(x)\|^2_{H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)} + C\int_0^t \|w_R(x,s)\|^2_{H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)}\; ds
\end{aligned}$$

Par le lemme de Gronwall on trouve

$$\|w_R(x,t)\|^2_{L^\infty([0,T],H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2))} \leq \|w_{0,R}(x)\|^2_{H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)} e^{Ct} \tag{2.7}$$

Donc $(x,t) \mapsto w_{R,\epsilon}(x,t)$ est bornée dans $L^\infty([0,T],\dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^2))$. On a aussi besoin d'avoir une borne de $(x,t) \mapsto w_{R,\epsilon}(x,t)$ dans l'espace $(L^2\dot{H}^{s+1/2})_{uloc}$. Autrement dit, on aimerait avoir un contrôle des normes équivalentes

$$\|w_R\|^2_{(L^2\dot{H}^{s+1/2})_{uloc}} = \|\theta_R\|^2_{(L^2\dot{H}^{1/2})_{uloc}} = \sup_{\phi\in B}\int_0^T \int \phi|\Lambda^{1/2}\theta_R|^2 \; dx\; ds$$

Nous avons vu que

$$\begin{aligned} A_\phi(w_R(x,T)) + \int_0^T \int \phi|\Lambda^{s+1/2}w_R|^2 \, dx \, ds \quad &\lesssim \quad A_\phi(w_{0,R}(x)) \\ &+ (\frac{C\eta}{2} + \frac{\nu}{2}) \int_0^T \int_{k+[0,1]^2} \phi_k |\Lambda^{1/2}\theta_R|^2 \, dx \, ds \\ &+ (\frac{1}{2\eta} + \frac{1}{2\nu}) \int_0^T \|\theta_R\|^2_{L^2_{uloc}} \, ds \end{aligned}$$

On prend le sup sur $\phi \in B_\phi$, $\psi \in B_\psi$ et sur $k \in \mathbb{Z}^2$. Alors, en choisissant ν et η suffisament grands pour que la norme $\|\Lambda^{1/2}\theta_R\|^2_{(L^2L^2)_{uloc}}$ apparaissant dans les termes de droite soit absorbée par le terme de gauche. On obtient

$$\|w_R\|^2_{H^s_{uloc}} + \|\Lambda^{1/2}\theta_R\|^2_{(L^2L^2)_{uloc}} \lesssim \|w_{0,R}\|^2_{H^s_{uloc}} + \int_0^T \|w_R\|^2_{H^s_{uloc}} \, ds$$

donc

$$\|\Lambda^{1/2}\theta_R\|^2_{(L^2L^2)_{uloc}} \lesssim \|w_{0,R}\|^2_{H^s_{uloc}} + \int_0^T \|w_R\|^2_{H^s_{uloc}} \, ds$$

Ce qui nous donne la borne $(L^2\dot{H}^{s+1/2})_{uloc}$.

La dernière partie est consacrée au passage à la limite. On montre que $w_{R,\epsilon}$ converge faiblement vers w quand $R \to \infty$, $\epsilon \to 0$.

2.8 Passage à la limite ($R \to \infty$, $\epsilon \to 0$)

Dans cette section, on montre qu'une solution $w_{R,\epsilon}$ de l'équation tronquée et régularisée $(SQG)_{R,\epsilon}$ tend vers une solution de l'équation (SQG). L'étape importante est le passage à la limite dans le terme non linéaire.

Soit $\eta : (t,x) \mapsto \eta(t,x) \in \mathcal{D}([0,T] \times \mathbb{R}^2)$ une fonction test. Clairement, on a

$$< \partial_t \theta_{R,\epsilon}, \eta > = - < \theta_{R,\epsilon}, \partial_t \eta > \underset{R \to +\infty}{\longrightarrow} - < \theta_\epsilon, \partial_t \eta >$$

Donc,

$$\partial_t w_{R,\epsilon} \xrightarrow[R \to +\infty, \ \epsilon \to 0]{} \partial_t w \ \text{ in } \mathcal{D}'([0,\mathrm{T}] \times \mathbb{R}^2)$$

Intéressons-nous à la convergence du terme non linéaire. Comme d'habitude la convergence faible n'est pas suffisante pour passer à la limite dans le terme non linéaire. Ceci vient du fait qu'un produit de fonctions convergeant faiblement ne converge pas forcément faiblement. Nous avons besoin d'une converge forte de $\theta_{R,\epsilon}$, elle est donné par une version du théorème de compacité de Rellich dont nous rappelons l'énoncé (voir [PGLR]), lemme 21.5, pp 218) :

Théorème (Rellich). *Soit $a > 0$. Si $(\theta_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ est une famille de fonctions sur $(0,T) \times \mathbb{R}^2$ telle que pour tout $\phi \in \mathcal{D}((0,T) \times \mathbb{R}^2)$ on a : $(\phi\theta_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ est bornée dans $L^2((0,T), H^1(\mathbb{R}^2))$ et $(\phi\partial_t\theta_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1})$ est bornée dans $L^2((0,T), H^{-a}(\mathbb{R}^2))$ alors il existe $\theta_\infty \in L^2_{loc}((0,T) \times \mathbb{R}^2)$ et une suite ε_n convergeant vers zéro telle que pour tout $\phi \in \mathcal{D}((0,T) \times \mathbb{R}^2)$ la suite $\phi\theta_{\varepsilon_n}$ converge fortement vers $\phi\theta_\infty$ fortement dans $L^2_{loc}((0,T) \times \mathbb{R}^2)$ et faiblement dans $L^2_{loc}((0,T), H^1(\mathbb{R}^2))$. Si, de plus, pour tout $\phi \in \mathcal{D}((0,T) \times \mathbb{R}^2)$ on a $(\phi\theta_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ est bornée dans $L^\infty((0,T), L^2(\mathbb{R}^2))$ alors la suite $\phi\theta_{\varepsilon_n}$ converge vers $\phi\theta_\infty$ fortement dans $L^p((0,T), L^2)$ pour tout $p \in [1, \infty[$ et faiblement dans $L^3((0,T), L^4)$*

Comme $\theta_{R,\epsilon}$ est uniformément borné par rapport à R et ϵ dans $(L^2\dot{H}^{1/2})_{loc}$ et comme $u_{R,\epsilon}$ est uniformément borné dans l'espace $(L^2L^2)_{loc}$. Par conséquent, en utilisant les injections de Sobolev on en déduit que $\theta_{R,\epsilon}u_{R,\epsilon}$ est uniformément bornée dans $(L^2L^4)_{loc} \cap (L^2L^2)_{loc} \subset (L^2L^{4/3})_{loc} \subset (L^2H^{-1/2})_{loc}$, d'où $\nabla.\theta_{R,\epsilon}u_{R,\epsilon}$ est uniformément bornée dans $(L^2\dot{H}^{-3/2})_{loc}$. De plus, comme $\theta_{R,\epsilon}$ est uniformément borné dans l'espace $(L^2\dot{H}^{1/2})_{loc}$ alors $\Lambda\theta_{R,\epsilon}$ est uniformément borné dans l'espace $(L^2\dot{H}^{-1/2})_{loc}$. On en déduit que $\partial_t\theta_{R,\epsilon}$ est uniformément borné dans $(L^2\dot{H}^{-3/2})_{loc}$. En utilisant le théorème de Rellich, on obtient la convergence forte souhaitée (à extraction près d'une sous-suite $R_{k\geq 0}$, $\varepsilon_{j\geq 0}$ qui converge respectivement vers R et ε que nous noterons encore R et ε par abus de notation)

$$\theta_{R,\epsilon} \xrightarrow[R\to+\infty,\ \epsilon\to 0]{} \theta \text{ dans } (L^2L^2)_{loc}$$

Par conséquent, $\nabla.(u_R\theta_R)$ converge faiblement (à une extraction près) quand $R \to +\infty, \epsilon \to 0$ vers $\nabla.(u\theta)$ dans l'espace $(L^2H^{-3/2})_{loc}$ et donc aussi dans l'espace $\mathcal{D}'((0,T], \mathbb{R}^2)$. De plus, $\Lambda\theta_R$ est uniformément bornée dans $(L^2\dot{H}^{-1/2})_{loc}$, donc $\Lambda\theta_{R,\epsilon}$ converge faiblement (à une extraction près) quand $R \to +\infty, \epsilon \to 0$ vers Λw dans $(L^2H^{-1/2})_{loc}$ et donc converge dans $\mathcal{D}'((0,T], \mathbb{R}^2)$. On en déduit que, pour tout η dans $\mathcal{D}([0,T] \times \mathbb{R}^2)$ on a :

$$< \eta(t,x), \partial_t w > = < \big(\Lambda^{-s}\nabla\big) \cdot \big(\Lambda^s w(\mathcal{R}^\perp\Lambda^s w)\big) - \Lambda w, \eta >$$

L'étape suivante consiste à montrer que θ et w ont la régularité voulue. Rappelons que L^p_{uloc} (avec $p > 1$) et H^s_{uloc} (avec $s \in \mathbb{R}$) sont respectivement les espaces duaux des espaces de Banach séparables suivant :

$$\begin{aligned} WL^{p'}(\mathbb{R}^2) &= \left\{\theta \in L^{p'}_{loc}(\mathbb{R}^2),\ \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \|\theta\|_{L^{p'}(k+[0,1]^2)} < \infty\right\} \\ WH^{-s}(\mathbb{R}^2) &= \left\{\theta \in H^{-s}_{loc}(\mathbb{R}^2),\ \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \|\phi(x-k)\theta\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^2} < \infty\right\} \end{aligned}$$

où $1/p + 1/p' = 1$.

Le théorème de Rellich nous fournit aussi la converge faible suivante (à une extraction près) :

$$\theta_{R,\epsilon} \xrightarrow[R\to+\infty,\ \epsilon\to 0]{} \theta \ \ faiblement\ dans\ (L^2\dot{H}^{1/2})_{loc}$$

Nous avons vu que $w_{R,\epsilon}$ est uniformément borné dans l'espace $(L^\infty \dot{H}^s)_{uloc}$ qui est l'espace dual de l'espace de Banach séparable L^1WH^{-s}. Par le théorème de Banach Alaoglu (voir [Bre] page 50), on en déduit que $w \in \cap_{t<T}(L^\infty(0,t),\dot{H}^s)_{uloc}$ et donc $\theta \in \cap_{t<T}(L^\infty(0,t),L^2)_{uloc}$.

Dans la section précédente, nous avons vu que $w_{R,\epsilon} \in (L^2\dot{H}^{s+1/2})_{uloc}$. Comme ce dernier est l'espace dual de l'espace de Banach séparable $L^2WH^{-s-1/2}$. De même, par le théorème de Banach Alaoglu, on en déduit que $w \in \cap_{t<T}(L^2(0,t),\dot{H}^{s+1/2})_{uloc}$ et donc $\theta \in \cap_{t<T}L^2((0,t),\dot{H}^{1/2})_{uloc}$

Concernant la donnée initiale, nous avons les converges suivantes :

$$\theta_{0,R,\epsilon} \xrightarrow[R\to+\infty,\ \epsilon\to 0]{} \theta_0 \ \ *-faiblement \text{ dans } L^\infty$$
$$w_{0,R,\epsilon} \xrightarrow[R\to+\infty,\ \epsilon\to 0]{} w_0 \ \ *-faiblement \text{ dans } H^s_{uloc}$$

Montrons la première convergence. Pour tout $\phi \in L^1$ on a :

$$< \theta_{0,R,\epsilon}, \phi >=< \theta_{0,R}, \phi * \rho_\epsilon > \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} < \theta_{0,R}, \phi >,$$

En utilisant la borne uniforme précédent obtenue, à savoir

$$\begin{aligned} < \theta_{0,R}, \phi > &= < \chi_R\theta_0, \phi > + < [\Lambda^s, w_{0,R}]\chi_R, \phi > \\ &\le < \chi_R\theta_0, \phi > + R^{-s}\|\nabla\chi\|_{L^\infty}\|w_0\|_{L^\infty} + 2R^{-s}\|\chi_R\|_{L^\infty}\|w_0\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

On en déduit que

$$< \theta_{0,R}, \phi > \xrightarrow[R\to+\infty]{} < \theta_0, \phi > \quad * - faiblement\ dans\ L^\infty.$$

Concernant la seconde convergence, nous avons vu que $w_{0,R,\epsilon}$ est uniformément borné dans l'espace $\dot{H}^s_{uloc}$, par conséquent, comme $\dot{H}^s_{uloc}$ est un espace dual, nous obtenons (à extraction près) la convergence suivante

$$w_{0,R,\epsilon} \xrightarrow[R\to+\infty,\ \epsilon\to 0]{} w_0 \quad *-faiblement\ dans\ \dot{H}^s_{uloc}.$$

et nous en concluons que

$$\theta_{0,R,\epsilon} \xrightarrow[R\to+\infty,\ \epsilon\to 0]{} \theta_0 \quad *-faiblement\ dans\ \Lambda^s(\dot{H}^s_{uloc}).$$

En passant à la limite dans (2.7), on obtient

$$\|w(x,t)\|^2_{L^\infty H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)} \lesssim e^{Ct}$$

Donc, pour $1/4 \leq s < 1$, les solutions n'explosent pas en temps fini et nous avons donc existence globale de solutions faibles pour toute donnée initiale $\theta_0 \in \Lambda^s(\dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Remarque 7. *L'objet du chapitre suivant sera de traiter* $0 < s < 1/4$*. Ce cas est dû au manque de régularité dans le contrôle du troisième terme de la section 3, à savoir*

$$-\int \nabla \Lambda^{-s}(w_R\phi)u_R\theta_R \; dx$$

En effet, on ne peut pas montrer que ce terme est contrôlé par $C\|w_R\|^2_{H^s_{uloc}} + \gamma\|w_R\|^2_{H^{s+1/2}_{uloc}}$ *pour tout* $\gamma > 0$*. Néanmoins, dans ce cas, on peut montrer que pour toute donnée initiale* $\theta_0 \in \Lambda^s(\dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)) \cap L^\infty$ *on a existence locale de solutions faibles.*

Chapitre 3

Un résultat d'existence locale pour l'équation (SQG) dissipative critique

3.1 Introduction et théorème principal

Dans ce chapitre, nous continuons l'étude de l'équation quasi-géostrophique (SQG) dissipative critique sur l'espace $\mathbb{R}^2$ tout entier.

$$(SQG) : \begin{cases} \partial_t \theta = u.\nabla\theta - (-\Delta)^{1/2}\theta \\ u = (u_1, u_2) = (-R_2\theta, R_1\theta) \end{cases}$$

Comme d'habitude $\theta : (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction scalaire modélisant la température du fluide. Le terme u modélise la vitesse de fuide, qui s'exprime en fonction des transformées de Riesz usuelles de θ dans $\mathbb{R}^2$ notées R_1 et R_2. Plus précisément u est définie par :

$$u(\theta) = (R_2\theta, -R_1\theta) = (\partial_{x_2}(-\Delta)^{1/2}\theta, -\partial_{x_1}(-\Delta)^{1/2}\theta)$$

On notera, pour tout $0 \leq \alpha < 2$, $\Lambda^\alpha\theta \equiv (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\theta$, où

$$\Lambda^\alpha\theta = (-\Delta)^{\alpha/2}\theta = C_\alpha P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\theta(x) - \theta(x-y)}{|y|^{2+\alpha}} dy, \quad \text{où } \ C_\alpha > 0.$$

Dans le chapitre précédent, nous avons montré qu'il existe au moins une solution faible globale pour toute donnée initiale $\theta_0 \in \Lambda^s(H^s_{uloc}) \cap L^\infty$ sans condition de petitesse et pour tout $s \in [1/4, 1]$. Cette contrainte vient du fait que dans le cas $0 < s < 1/4$, à cause du terme

$$-\int \nabla\Lambda^{-s}(w_R\phi)u_R\theta_R \, dx,$$

on ne peut pas montrer l'inégalité suivante, valable pour tout $\gamma > 0$,

$$\partial_t A_\phi(w_R) + \int \phi\theta_R\Lambda\theta_R \, dx \leq (C + \frac{2}{\gamma}) \, \|w_R\|^2_{H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)} + \frac{\gamma}{2}\|\phi_1 w_R\|^2_{\dot{H}^{s+1/2}}$$

Néanmoins, on peut monter que :

$$\partial_t\|w_R(x,t)\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}} \leq C\|w_R\|^2_{H^s_{uloc}} + \|w_R\|^4_{\dot{H}^s_{uloc}} + C$$

Ce qui implique un contrôle local de la solution. Plus précisément, on démontre le théorème d'existence locale suivant :

Théorème 5. *Supposons que $0 \leq s < 1/4$, et $\theta_0 \in \Lambda^s(\dot{H}^s_{uloc}) \cap L^\infty$, alors l'équation (SQG) possède au moins une solution faible locale θ vérifiant pour tout*

$$T < \frac{C(\|\theta_0\|_\infty}{1 + \|w_{0,R}\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}}}$$

on a :

$$\theta \in (L^\infty([0,T], L^2))_{uloc} \cap (L^2_t([0,T], \dot{H}^{1/2}))_{uloc}$$

et

$$w \in (L^\infty([0,T], \dot{H}^s))_{uloc} \cap (L^2_t([0,T], \dot{H}^{s+1/2}))_{uloc}.$$

De plus, pour tout $t \leq T$, la solution w vérifie l'inégalité d'énergie :

$$\|w_R(x,T)\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}} \leq \|w_0\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}} + C\int_0^T \Big(\|w\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}} + \|w\|^4_{\dot{H}^s_{uloc}} + C\Big) \, ds$$

où $C > 0$ est une constante qui ne dépend que de $\|\theta_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ et $\|w_0\|_{\dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)}$.

3.2 Démonstration du théorème principal

3.2.1 Position du problème

Avant de commencer la démonstration du théorème principal, rappelons que l'espace $H^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)$ est défini par la norme

$$\sup_{\phi\in B_\phi} \int \phi\frac{|\Lambda^s\theta(x,t)|^2}{2} + \phi\frac{|\theta(x,t)|^2}{2} \, dx \equiv \sup_{\phi\in B_\phi} A_\phi(\theta)$$

Nous utiliserons aussi (une seule fois) la norme équivalente suivante

$$\|\theta\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}} = \sup_{k\in\mathbb{Z}^2} \int |\Lambda^s(\phi_0(x-k)\theta(x,t))|^2 \, dx$$

Nous reprenons le modèle tronqué avec données initiales tronquées et régularisées suivant

$$(SQG)_{R,\varepsilon} : \begin{cases} \partial_t w_{R,\epsilon} = \left(\Lambda^{-s}\nabla\right) \cdot \left(\Lambda^s w_{R,\epsilon}\ \mathcal{R}^{\perp}\Lambda^s w_{R,\epsilon}\right) - \Lambda w_{R,\epsilon} \\ \nabla .\ \mathcal{R}^{\perp}\Lambda^s w_{R,\epsilon} = 0 \\ \theta_{0,R,\varepsilon} = \Lambda^s(w_0\chi_R) * \rho_\varepsilon \end{cases}$$

Où χ_R est une fonction positive de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que, pour $R > 0$,

$$\begin{cases} \chi_R(x) & = 1 \text{ si } |x| \leq R \\ \chi_R(x) & = 0 \text{ si } |x| \geq 2R \end{cases}$$

Et la solution tronquée θ_R est définie par

$$\theta_R = \Lambda^s w_R = \Lambda^s(w\chi_R)$$

La condition sur la donnée initiale est la même qu'au chapitre 1, c'est-à-dire :

$$\theta_{0,R,\epsilon} = \Lambda^s(w\chi_R) \in \Lambda^s(H^s(\mathbb{R}^2)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2) \subset L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$$

donc la donnée initiale tronquée et régularisée vérifie

$$\theta_{0,R,\varepsilon} \in \bigcap_{k\geq 0} H^k \subset H^2 \subset \dot{B}^0_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$$

Remarque 8. *Dans la suite, nous allons utiliser une méthode d'énergie pour démontrer notre résultat d'existence locale, nous avons déjà obtenu des bornes uniformes pour la donnée initiale, celle-ci sont valables pour tout* $0 < s < 1$*, ces bornes uniformes fournissent la compacité nécessaire à un passage à la limite faible lorsque* $R \to$ *et* $\epsilon \to 0$*. Nous ne traiterons donc pas les bornes uniformes pour la donnée initiale.*

Comme précédemment, le résultat d'existence globale obtenu par Abidi et Hmidi [AH] et le théorème de Resnick [Res] permettent d'affirmer qu'il existe au moins une solution faible w_R de l'équation tronquée et régularisée $(SQG)_{R,\varepsilon}$ vérifiant

$$\theta_R \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+;\ \dot{B}^0_{\infty,1}) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+;\ \dot{B}^1_{\infty,1}) \cap L^\infty([0,T], L^2) \cap L^2([0,T], H^{1/2}), \quad \forall T > 0$$

Nous avons vu que l'équation a bien un sens dans l'espace $w \in L^\infty([0,T], \dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^2))$ et $\Lambda^s w \in L^\infty([0,T], L^\infty(\mathbb{R}^2))$ où $T > 0$. Nous reprenons le calcul de $\partial_t A_\phi(w_{R,\epsilon})$ effectué au chapitre précédent :

$$\partial_t A_\phi(w_{R,\epsilon}) + \int \phi\Lambda^s w_{R,\epsilon}\Lambda^{s+1} w_{R,\epsilon}\, dx = -\int w_{R,\epsilon}\phi\Lambda^{-s}\nabla.(u\Lambda^s w_{R,\epsilon})\, dx$$

$$-\int \phi\Lambda^s w_{R,\epsilon}\nabla.(u_{R,\epsilon}\Lambda^s w_{R,\epsilon})\, dx - \int w_{R,\epsilon}\phi\Lambda w_{R,\epsilon}\, dx$$

Les deux derniers termes apparaissant à droite de la dernière égalité se contrôlent tous par $C\|w_{R,\epsilon}\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}(\mathbb{R}^2)}$. Concernant le premier terme de droite, on fait une intégration par parties

$$-\int w_{R,\epsilon}\phi\Lambda^{-s}\nabla.(u\Lambda^s w_{R,\epsilon})\, dx = -\int \Lambda^{-s}\nabla(w_{R,\epsilon}\phi)u_{R,\epsilon}\Lambda^s w_{R,\epsilon}\, dx$$

Dans le cas où $1/4 \leq s \leq 1$, on introduit une fonction positive $\psi \in \mathcal{D}$ valant 1 sur un voisinage du support de ϕ et 0 sur $\operatorname{supp}\phi + 2$ (cette fonction ψ sera utilisée dans tout ce chapitre), l'inégalité de Hölder permet d'écrire

$$-\int \Lambda^{-s}\nabla(w_{R,\epsilon}\phi)\psi u_{R,\epsilon}\Lambda^s w_{R,\epsilon}\, dx \leq \|\phi w_{R,\epsilon}\|_{\dot{H}^{1-s}}\|\theta_R\|_{L^\infty}\|\psi u_R\|_{L^2}$$

Malheureusement, on ne peut clairement pas écrire cela si $0 < s < 1/4$ étant donné que l'on contrôle ϕw_R qu'en norme $L^2\dot{H}^{s/1/2}$ et que l'on dérive $(1-s)$ fois. Classiquement, il est naturel de vouloir partager les dérivées en donnant à chacun des termes le nombre de dérivées souhaitées. Dans notre cas, on aimerait donner moins de dérivées au terme $w_{R,\epsilon}\phi$ du fait que $w_{R,\epsilon}\phi \in L^2\dot{H}^{s+1/2}$. L'idéal serait donc de pouvoir écrire

$$-\int w_{R,\epsilon}\phi\Lambda^{-s}\nabla.(\psi u\Lambda^s w_{R,\epsilon})\, dx = -\int \Lambda^{s+\frac{1}{2}}(w_{R,\epsilon}\phi)\Lambda^{\frac{1}{2}-2s}(\psi u\Lambda^s w_{R,\epsilon})\, dx$$

Et ensuite utiliser l'inégalité suivante (où $\psi = \psi_1^2$) :

$$\|\psi u_{R,\epsilon}\theta_{R,\epsilon}\|_{H^{\frac{1}{2}-2s}} \lesssim \|\psi_1 u_{R,\epsilon}\|_{L^\infty}\|\psi_1\theta_{R,\epsilon}\|_{H^{\frac{1}{2}-2s}} + \|\psi_1\theta_{R,\epsilon}\|_{L^\infty}\|\psi_1 u_{R,\epsilon}\|_{H^{\frac{1}{2}-2s}} \tag{3.1}$$

Remarque 9. *Comme nous allons le voir plus bas, le terme restant (*i.e *celui en $1-\psi$) se traite facilement et ne pose aucun probleme. Ceci est dû au fait que le noyau de $\nabla\Lambda^s$ est intégrable loin de l'origine.*

Il est facile de voir que l'inégalité (3.1) est inexploitable si l'on souhaite obtenir des estimations indépendantes de R, étant donné que les transformées de Riesz ne sont pas bornées dans L^∞. Cependant, on va montrer que l'on peut quand même contrôler le produit $\phi u_R\theta_R$ dans un espace de Sobolev de régularité positive en utilisant une variante de l'inégalité (3.1). En fait, on peut montrer que $\phi u_R\theta_R$ se contrôle dans un espace de Sobolev de régularité positive à condition de perdre un peu sur le contrôle de ϕu_R. L'idée consiste à remplacer la norme L^∞ de ϕu_R par la norme d'espace de Besov $B^{-\delta}_{\infty,\infty}$ de ϕu_R, où $\delta > 0$. Pour cela, il faudrait d'abord commencer par montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\phi u_R \in B^{-\delta}_{\infty,\infty}$. C'est l'objet du prochain lemme,

Lemme 12. *Pour tout $\phi \in B_\phi$, il existe $\delta > 0$ tel que $\phi u_R \in \dot{B}^{-\delta}_{\infty,\infty}$.*

Preuve. Comme $\phi u_R \in \dot{H}^{1/2}$ alors par Bernstein $\phi u_R \in \dot{B}^{-1/2}_{2,\infty}$ en utilisant une nouvelle fois Bernstein on a $\dot{B}^{-1/2}_{2,\infty} \subset \dot{B}^{-1/2}_{\infty,\infty}$. D'autre part, comme $\phi u_R \in B^0_{\infty,\infty}$ alors par interpolation $\phi u_R \in \dot{B}^{-\delta}_{\infty,\infty}$ pour tout $0 < \delta < 1/2$.

□

On divise ensuite l'intégrale en deux parties

$$\begin{aligned} -\int \Lambda^{-s}\nabla(w_{R,\epsilon}\phi)u_{R,\epsilon}\Lambda^s w_{R,\epsilon}\,dx &= -\int \Lambda^{-s}\nabla(w_{R,\epsilon}\phi)(1-\psi)u_{R,\epsilon}\Lambda^s w_{R,\epsilon}\,dx \\ &\quad -\int \Lambda^{-s}\nabla(w_{R,\epsilon}\phi)\psi u_{R,\epsilon}\Lambda^s w_{R,\epsilon}\,dx \end{aligned}$$

Pour la première intégrale, on intégre par parties puis on utilise le contrôle L^2_{uloc} de u_R associé à l'intégrabilité du noyau de convolution l'opérateur $\Lambda^{-s}\nabla$ loin de l'origine et enfin le fait que $\theta \in L^\infty$ pour obtenir que

$$\begin{aligned} -\int \Lambda^{-s}\nabla(w_{R,\epsilon}\phi)(1-\psi)u_{R,\epsilon}\Lambda^s w_{R,\epsilon}\,dx &= -\int w_{R,\epsilon}\phi\Lambda^{-s}\nabla((1-\psi)u_{R,\epsilon}\Lambda^s w_{R,\epsilon})\,dx \\ &\leq \|\theta_0\|_{L^\infty}\|w_{R,\epsilon}\phi\|^2_{L^2} \end{aligned}$$

Le contrôle de la seconde intégrale est plus technique, on commence par écrire ce terme de la façon suivante, il existe $\sigma > 0$:

$$\begin{aligned} -\int \Lambda^{-s}\nabla(w_{R,\epsilon}\phi)\psi u_{R,\epsilon}\Lambda^s w_{R,\epsilon}\,dx &= -\int w_{R,\epsilon}\phi\Lambda^{\sigma}(\psi_1 u_{R,\epsilon}\psi_1\Lambda^s w_{R,\epsilon})\,dx \\ &\leq C\|w_{R,\epsilon}\phi\|_{L^2}\|\psi u_R\theta_{R,\epsilon}\|_{H^\sigma} \end{aligned}$$

Afin d'alléger les expressions, nous omettrons d'écrire la dépendance en ϵ dans la suite. L'inégalité dont on fera usage en section 2 est la suivante, elle permettra d'estimer le terme de la dernière inégalité ci-dessus, elle sera donc centrale dans l'obtention de l'inégalité d'énergie :

Lemme 13. *Pour tout $\sigma > 0$ et $\delta > 0$ vérifiant $\sigma+\delta \leq 1/2$, on a $\psi_1\theta_R \in \dot{H}^{\sigma+\delta}\cap L^\infty$ et $\psi_1 u_R \in \dot{H}^\sigma \cap B^{-\delta}_{\infty,\infty}$. De plus, le produit vérifie $\psi u_R\theta \in \dot{H}^\sigma$ ainsi que l'estimation :*

$$\|\psi u_R\theta_R\|_{H^\sigma} \leq \|\psi_1 u_R\|_{B^{-\delta}_{\infty,\infty}}\|\psi_1\theta_R\|_{H^{\sigma+\delta}} + \|\psi_1\theta_R\|_{L^\infty}\|\psi_1\theta_R\|_{\dot{H}^\sigma}$$

Preuve. Le premier point n'est rien d'autre que le lemme 11. La démonstration de la deuxième partie du lemma repose sur la décomposition de Littlewood Paley pour les distributions ayant une régularité Sobolev positive. D'après le théorème 4.1 p. 34 de [PGLR], si E un espace de Banach de distributions dont la norme est invariante par translation (au sens de la définition 4.1 p. 31, [PGLR]) alors pour tout $1 \leq q \leq \infty$, pour tout couple (σ, τ) vérifiant $-\sigma < \tau < 0$ et $\sigma > 0$ l'opérateur de multiplication ponctuelle est un opérateur bilinéaire borné de l'espace $(B^{\kappa}_{q,E} \cap B^{\tau}_{\infty,\infty}) \times (B^{\kappa}_{q,E} \cap B^{\tau}_{\infty,\infty})$ dans l'espace $B^{\kappa+\tau}_{q,E}$ où, pour tout $\kappa_0 < \kappa < \kappa_1$ et $\sigma = (1-\eta)\kappa_0 + \eta\kappa_1$ pour tout $\eta \in (0,1)$, l'espace $B^{\kappa+\tau}_{q,E}$ est défini par interpolation complexe

$$B^s_{q,E} = [H^{\kappa_0}_E, H^{\kappa_1}_E]_{\theta,q}$$

où l'espace H^{κ}_E est l'espace $(Id - \Delta)^{\frac{-\kappa}{2}} E$ muni de la norme

$$\|f\|_{H^{\kappa}_E} = \|(Id - \Delta)^{\frac{\kappa}{2}} f\|_E$$

Autrement dit, pour tout couple de fonction $(f,g) \in (B^{\kappa}_{q,E} \cap B^{\tau}_{\infty,\infty})^2$ et pour tout $1 \le q \le \infty$ on a

$$\|fg\|_{B^{\kappa+\tau}_{q,E}} \le \|f\|_{B^{\kappa}_{q,E}} \|g\|_{B^{\tau}_{\infty,\infty}} + \|f\|_{B^{\tau}_{\infty,\infty}} \|g\|_{B^{\kappa}_{q,E}}$$

En particulier, pour $E = L^2$ et $q = 2$ et en remarquant que $\|f\|_{B^{-\tau}_{\infty,\infty}} \le \|f\|_{L^\infty}$ on en déduit le lemme en prenant $\kappa = \sigma + \delta$ et $\tau = -\delta$.

□

3.2.2 L'inégalité d'énergie

Dans cette section, nous allons démontrer l'inégalité d'énergie suivante

Lemme 14. *On a l'inégalité*

$$\|w_R(x,T)\|^2_{\dot H^s_{uloc}} \le \|w_{0,R}\|^2_{\dot H^s_{uloc}} + C \int_0^T \left(\|w_R\|^2_{H^s_{uloc}} + \|w_R\|^3_{\dot H^s_{uloc}} + C \right) \, ds$$

Remarque 10. *La constante $C > 0$ ne dépend que de quantités globalement contrôlées, dans la preuve qui suit, toutes les constantes seront notées C, bien qu'elles puissent changer d'une ligne à l'autre.*

On applique le lemme 12 en choisissant d'abord $\sigma > 0$ telle que

$$\frac{1}{2} - 2s < \sigma < \frac{1}{2}$$

puis $\delta > 0$ telle que

$$\delta + \sigma < \frac{1}{2}$$

Ainsi, les conditions sur σ et δ nous permettent d'écrire l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} -\int \Lambda^{-\sigma-s} \nabla(w_R\phi) \Lambda^{\sigma}(\psi u_R \Lambda^s w_R) &\le \|w_R\phi\|_{\dot H^{1-s-\sigma}} \|\psi u_R \theta_R\|_{\dot H^{\sigma}} \\ &\lesssim \|w_R\phi\|_{\dot H^{1-s-\sigma}} \|\psi_1 u_R\|_{B^{-\delta}_{\infty,\infty}} \|\psi_1 \theta_R\|_{H^{\sigma+\delta}} \\ &\quad + \|w_R\phi\|_{\dot H^{1-s-\sigma}} \|\psi_1 \theta_R\|_{L^\infty} \|\psi_1 \theta_R\|_{\dot H^{\sigma}} \end{aligned}$$

où l'on a posé $\psi = \psi_1^2$. Ensuite, en écrivant que

$$\|\psi_2 u_R\|_{B^{-\delta}_{\infty,\infty}} \leq \|u_R\|_{\dot{B}^{-\delta}_{\infty,\infty}} \leq \|S_0 u_R\|_{\dot{B}^{-\delta}_{\infty,\infty}} + \|(Id - S_0)u_R\|_{\dot{B}^{-\delta}_{\infty,\infty}}$$

Et en remarquant que

$$\|S_0 u_R\|_{\dot{B}^{-\delta}_{\infty,\infty}} \leq \|S_0 u_R\|_{L^\infty}$$

Ainsi que

$$\begin{aligned} \|(S_0 u_R)(x)\|_{L^\infty} \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \frac{1}{|k|^3} \left(\int_{k+x} |u_R(y)|^2\, dy\right)^{1/2} &\leq C \sup_{k\in\mathbb{Z}^2} \left(\int_{k+x} |u_R(y)|^2\, dy\right)^{1/2} \\ &\lesssim \|u_R\|_{L^2_{uloc}} \\ &\lesssim \|w_R\|_{H^s_{uloc}} \end{aligned}$$

Où, dans la dernière inégalité, nous avons utilisé le lemme 8 du chapitre 1 (valable pour tout $0 < s < 1$). Nous avons donc

$$\|S_0 u_R\|_{L^\infty} \leq \|u_R\|_{L^2_{uloc}} \leq \|w_R\|_{\dot{H}^s_{uloc}}$$

Pour les hautes fréquences on a

$$\|(Id - S_0)u_R\|_{B^{-\delta}_{\infty,\infty}} \leq \sum_{j>0} \|\Lambda^{-\delta}\mathcal{R}^\perp \Delta_j \theta_R\|_{L^\infty} \leq \sum_{j>0} 2^{-j\delta}\|\theta_{0,R}\|_{L^\infty} \leq C\|\theta_R\|_{L^\infty}$$

Finalement,

$$\|\psi_2 u_R\|_{\dot{B}^{-\delta}_{\infty,\infty}} \leq C\|w_R\|_{\dot{H}^s_{uloc}} + \|\theta_R\|_{L^\infty} \leq C\|w_R\|_{\dot{H}^s_{uloc}} + \|\theta_{0,R}\|_{L^\infty}$$

Donc l'inégalité

$$\begin{aligned} -\int \Lambda^{-\sigma-s}\nabla(w_R\phi)\Lambda^\sigma(\psi u_R \Lambda^s w_R) \;\lesssim\; & \|w_R\phi\|_{\dot{H}^{1-s-\sigma}}\|\psi_1\theta_R\|_{L^\infty}\|\psi_1\theta_R\|_{\dot{H}^\sigma} \\ & + \|w_R\phi\|_{\dot{H}^{1-s-\sigma}}\|\psi_1 u_R\|_{\dot{B}^{-\delta}_{\infty,\infty}}\|\psi_1\theta_R\|_{\dot{H}^{\sigma+\delta}} \end{aligned}$$

devient

$$\begin{aligned} -\int \Lambda^{-\sigma-s}\nabla(w_R\phi)\Lambda^\sigma(\psi u_R \Lambda^s w_R) \;\lesssim\; & \|w_R\phi\|_{\dot{H}^{1-s-\sigma}}\|\psi_1\theta_R\|_{L^\infty}\|\psi_1\theta_R\|_{\dot{H}^\sigma} \\ & + \|w_R\phi\|_{\dot{H}^{1-s-\sigma}}\|\psi_1\theta_R\|_{\dot{H}^{\sigma+\delta}}\|\theta_{0,R}\|_{L^\infty} \\ & + \|w_R\phi\|_{\dot{H}^{1-s-\sigma}}\|w_R\|_{\dot{H}^s_{uloc}}\|\psi_1\theta_R\|_{\dot{H}^{\sigma+\delta}} \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant le fait que $s < 0 \leq 1/4$ et que $\sigma > 0$ est choisi de telle manière à ce que $1/2 - 2s < \sigma$, on en déduit que $s < 1 - s - \sigma < s + 1/2$ avec

$\delta + \sigma < 1/2$ par construction. Ceci nous permet d'interpoler et d'écrire que pour tout $(\kappa, \nu, \eta) \in (0,1)^3$ on a

$$\begin{aligned}
\partial_t A_\phi w_R + \int \phi \theta_R \Lambda^s \theta_R \, dx \quad &\leq \quad C\|w_R\|^2_{H^s_{uloc}} \\
&+ \quad C\|w_R\phi\|^{1-\kappa}_{\dot{H}^s}\|w_R\phi\|^{\kappa}_{\dot{H}^{s+1/2}}\|\psi_1\theta_R\|^{1-\eta}_{L^2}\|\psi_1\theta_R\|^{\eta}_{\dot{H}^{1/2}}\|\theta_{0,R}\|_{L^\infty} \\
&+ \quad C\|w_R\phi\|^{1-\kappa}_{\dot{H}^s}\|w_R\phi\|^{\kappa}_{\dot{H}^{s+1/2}} \, \|\psi_1\theta_R\|^{\nu}_{\dot{H}^{1/2}}\|\psi_1\theta_R\|^{1-\nu}_{L^2} \, \|\theta_{0,R}\|_{L^\infty} \\
&+ \quad C\|w_R\phi\|^{1-\kappa}_{\dot{H}^s}\|w_R\phi\|^{\kappa}_{\dot{H}^{s+1/2}}\|w_R\|_{\dot{H}^s_{uloc}}\|\psi_1\theta_R\|^{\eta}_{\dot{H}^{1/2}}\|\psi_1\theta_R\|^{1-\eta}_{L^2}.
\end{aligned}$$

En prenant le supremum sur tout les $\phi \in B_\phi$ et $\psi_1 \in B_{\psi_1}$ seulement sur certaines normes, à savoir, celles fournissant une norme $L^\infty \dot{H}^s_{uloc}$ de w_R ou de façon équivalente une norme $L^\infty L^2_{uloc}$ de θ_R, on obtient

$$\begin{aligned}
\partial_t A_\phi w_R + \int \phi \theta_R \Lambda^s \theta_R \, dx \leq C\|w_R\|^2_{H^s_{uloc}} & \\
+ C \sup_{\substack{\phi \in B_\phi \\ \psi_1 \in B_{\psi_1}}} & \left\{ \|w_R\phi\|^{1-\kappa}_{\dot{H}^s}\|\psi_1\theta_R\|^{1-\eta}_{L^2} \right\} \|w_R\phi\|^{\kappa}_{\dot{H}^{s+1/2}}\|\psi_1\theta_R\|^{\eta}_{\dot{H}^{1/2}}\|\theta_{0,R}\|_{L^\infty} \\
+ C \sup_{\substack{\phi \in B_\phi \\ \psi_1 \in B_{\psi_1}}} & \left\{ \|w_R\phi\|^{1-\kappa}_{\dot{H}^s}\|\psi_1\theta_R\|^{1-\nu}_{L^2} \right\} \|w_R\phi\|^{\kappa}_{\dot{H}^{s+1/2}} \, \|\psi_1\theta_R\|^{\nu}_{\dot{H}^{1/2}} \, \|\theta_{0,R}\|_{L^\infty} \\
+ C \sup_{\substack{\phi \in B_\phi \\ \psi_1 \in B_{\psi_1}}} & \left\{ \|w_R\phi\|^{1-\kappa}_{\dot{H}^s}\|\psi_1\theta_R\|^{1-\eta}_{L^2} \right\} \|w_R\|_{\dot{H}^s_{uloc}}\|w_R\phi\|^{\kappa}_{\dot{H}^{s+1/2}}\|\psi_1\theta_R\|^{\eta}_{\dot{H}^{1/2}},
\end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned}
\partial_t A_\phi w_R + \int \phi \theta_R \Lambda^s \theta_R \, dx \quad &\leq \quad C\|w_R\|^2_{H^s_{uloc}} + \|w_R\phi\|^{2-\kappa-\eta}_{\dot{H}^s_{uloc}} \, \|w_R\phi\|^{\kappa}_{\dot{H}^{s+1/2}}\|\psi_1\theta_R\|^{\eta}_{\dot{H}^{1/2}}\|\theta_{0,R}\|_{L^\infty} \\
&+ \quad C\|w_R\|^{2-\kappa-\nu}_{\dot{H}^s_{uloc}}\|w_R\phi\|^{\kappa}_{\dot{H}^{s+1/2}} \, \|\psi_1\theta_R\|^{\nu}_{\dot{H}^{1/2}} \, \|\theta_{0,R}\|_{L^\infty} \\
&+ \quad C\|w_R\|^{3-\eta-\kappa}_{\dot{H}^s_{uloc}}\|w_R\phi\|^{\kappa}_{\dot{H}^{s+1/2}}\|\psi_1\theta_R\|^{\eta}_{\dot{H}^{1/2}}.
\end{aligned}$$

Remarque 11. *Il est important de noter que les normes du type $\|w_R\phi\|_{\dot{H}^{s+1/2}}$ et $\|\psi_1\theta_R\|_{\dot{H}^{1/2}}$ sont les mêmes seulement après avoir pris le supremum sur toutes les fonctions $\phi \in B_\phi$ et $\psi_1 \in B_{\psi_1}$ respectivement. Dans notre cas, nous devont prendre ces suprema aussi tard que possible dans les estimations (au moins après avoir intégré en temps) afin d'obtenir les normes désirées, à savoir les normes $(L^2\dot{H}^{s+1/2})_{uloc}$ de w_R ou de façon équivalent les normes $(L^2\dot{H}^{1/2})_{uloc}$ de θ_R.*

Focalisons-nous à présent sur les 3 derniers termes apparaissant dans le membre de droite de l'inégalité précédente, à savoir

$$T_1 \equiv \|w_R\phi\|^{2-\kappa-\eta}_{\dot H^s_{uloc}} \ \|w_R\phi\|^{\kappa}_{\dot H^{s+1/2}} \|\psi_1\theta_R\|^{\eta}_{\dot H^{1/2}} \|\theta_{0,R}\|_{L^\infty},$$

$$T_2 \equiv \|w_R\phi\|^{2-\kappa-\nu}_{\dot H^s_{uloc}} \ \|w_R\phi\|^{\kappa}_{\dot H^{s+1/2}} \|\psi_1\theta_R\|^{\nu}_{\dot H^{1/2}} \|\theta_{0,R}\|_{L^\infty},$$

et

$$T_3 \equiv \|w_R\|^{3-\eta-\kappa}_{\dot H^s_{uloc}} \|w_R\phi\|^{\kappa}_{\dot H^{s+1/2}} \|\psi_1\theta_R\|^{\eta}_{\dot H^{1/2}}.$$

Les estimations des termes T_1 et T_2 sont les mêmes, il suffit donc d'estimer T_1 par exemple

$$T_1 = \|w_R\phi\|^{2-\kappa-\eta}_{\dot H^s_{uloc}} \|\theta_{0,R}\|_{L^\infty} \ \|w_R\phi\|^{\kappa}_{\dot H^{s+1/2}} \|\psi_1\theta_R\|^{\nu}_{\dot H^{1/2}},$$

en utilisant l'inégalité de Young (avec l'exposant $2/(\kappa+\eta) > 1$) on obtient, pour tout $\rho_1 > 0$

$$T_1 \leq \rho_1^{\frac{2}{\kappa+\eta-2}} \left(\frac{2-\kappa-\eta}{2}\right) \|w_R\phi\|^2_{\dot H^s_{uloc}} \|\theta_{0,R}\|^{\frac{2}{2-\kappa-\eta}}_{L^\infty} + \rho_1^{\frac{2}{\kappa+\eta}} \left(\frac{\kappa+\eta}{2}\right) \|w_R\phi\|^{\frac{2\kappa}{\kappa+\eta}}_{\dot H^{s+1/2}} \|\psi_1\theta_R\|^{\frac{2\eta}{\kappa+\eta}}_{\dot H^{1/2}}.$$

En utilisant une nouvelle fois l'inégalité de Young (avec l'exposant $\dfrac{\kappa+\eta}{\gamma} > 1$) on en déduit l'inégalité suivante

$$\|\phi w_R\|^{\frac{2\kappa}{\kappa+\eta}}_{\dot H^{s+\frac{1}{2}}} \|\psi_1\theta_R\|^{\frac{2\eta}{\kappa+\eta}}_{\dot H^{1/2}} \ \leq \ \frac{\kappa}{\kappa+\eta} \|w_R\phi\|^2_{\dot H^{s+1/2}} + \frac{\eta}{\kappa+\eta} \|\psi_1\theta_R\|^2_{\dot H^{1/2}},$$

finalement, on trouve

$$T_1 \leq \rho_1^{\frac{2}{\kappa+\eta-2}} \left(\frac{2-\kappa-\eta}{2}\right) \|w_R\phi\|^2_{\dot H^s_{uloc}} \|\theta_{0,R}\|^{\frac{2}{2-\kappa-\eta}}_{L^\infty} + \frac{\kappa\rho_1^{\frac{2}{\kappa+\eta}}}{2} \|w_R\phi\|^2_{\dot H^{s+1/2}} + \frac{\eta\rho_1^{\frac{2}{\kappa+\eta}}}{2} \|\psi_1\theta_R\|^2_{\dot H^{1/2}},$$

L'estimation de T_2 s'obtient en remplaçant ν par η, ainsi, on trouve

$$T_2 \leq \rho_1^{\frac{2}{\kappa+\nu-2}} \left(\frac{2-\kappa-\nu}{2}\right) \|w_R\phi\|^2_{\dot H^s_{uloc}} \|\theta_{0,R}\|^{\frac{2}{2-\kappa-\nu}}_{L^\infty} + \frac{\kappa\rho_1^{\frac{2}{\kappa+\nu}}}{2} \|w_R\phi\|^2_{\dot H^{s+1/2}} + \frac{\nu\rho_1^{\frac{2}{\kappa+\nu}}}{2} \|\psi_1\theta_R\|^2_{\dot H^{1/2}},$$

par conséquent, il existe une certaine constante $A > 0$ telle que pour tout $i = 1, 2$

$$T_i \lesssim \ \rho^{-A} \|w_R\phi\|^2_{\dot H^s_{uloc}} + \rho^A \left(\|w_R\phi\|^2_{\dot H^{s+1/2}} + \|\psi_1\theta_R\|^2_{\dot H^{1/2}}\right).$$

L'estimation du terme T_3 ne fournit malheureusement qu'une puissance strictement plus grande que 2 dans le terme $\|w_R\phi\|_{\dot H^s_{uloc}}$ et l'on obtient par conséquent un résultat d'existence locale. En effet, en utilisant l'inégalité de Young (avec l'exposant $2/(\kappa+\eta) > 1$), on obtient que, pour tout $\rho_3 > 0$

$$T_3 \;\leq\; \rho_3^{\frac{2}{\kappa+\eta}}\left(\frac{\kappa+\eta}{2}\right)\|\phi w_R\|_{\dot H^{s+\frac12}}^{\frac{2\kappa}{\kappa+\eta}}\|\psi_1\theta_R\|_{\dot H^{1/2}}^{\frac{2\eta}{\kappa+\eta}}+\;\rho_3^{\frac{2}{\kappa+\eta-2}}\left(\frac{2-\kappa-\eta}{2}\right)\|w_R\|_{\dot H^s_{uloc}}^{\frac{2(3-\eta-\kappa)}{2-\kappa-\eta}}$$

et une fois encore, l'inégalité de Young (avec l'exposant $\dfrac{\kappa+\eta}{\gamma} > 1$) donne

$$\|\phi w_R\|_{\dot H^{s+\frac12}}^{\frac{2\kappa}{\kappa+\eta}}\|\psi_1\theta_R\|_{\dot H^{1/2}}^{\frac{2\eta}{\kappa+\eta}} \;\leq\; \frac{\kappa}{\kappa+\eta}\|w_R\phi\|^2_{\dot H^{s+1/2}}+\frac{\eta}{\kappa+\eta}\|\psi_1\theta_R\|^2_{\dot H^{1/2}},$$

par conséquent,

$$T_3 \leq \frac{\kappa\rho_3^{\frac{2}{\kappa+\eta}}}{2}\|w_R\phi\|^2_{\dot H^{s+1/2}}+\frac{\eta\rho_3^{\frac{2}{\kappa+\eta}}}{2}\|\psi_1\theta_R\|^2_{\dot H^{1/2}}+\rho_3^{\frac{2}{\kappa+\eta-2}}\left(\frac{2-\kappa-\eta}{2}\right)\|w_R\|_{\dot H^s_{uloc}}^{\frac{2(3-\kappa-\eta)}{2-\kappa-\eta}}.$$

Donc, pour une certaine constante $B > 0$ on a

$$T_3 \lesssim\; \rho_3^B\|w_R\phi\|^2_{\dot H^{s+1/2}}+\rho_3^B\|\psi_1\theta_R\|^2_{\dot H^{1/2}}+\rho_3^{-B}\|w_R\|_{\dot H^s_{uloc}}^{\frac{2(3-\kappa-\eta)}{2-\kappa-\eta}},$$

En rassemblant les estimations des T_i (i=1,2,3) on obtient

$$\begin{aligned}\partial_t A_\phi w_R+\int\phi\theta_R\Lambda^s\theta_R\,dx \;&\leq\; \left(C+\rho^{-A}\right)\|w_R\|^2_{H^s_{uloc}}+\rho_3^{-B}\|w_R\|_{\dot H^s_{uloc}}^{\frac{2(3-\kappa-\eta)}{2-\kappa-\eta}}\\ &+\;\;(\rho^A+\rho_3^B)\|w_R\phi\|^2_{\dot H^{s+1/2}}+(\rho^A+\rho_3^B)\|\psi_1\theta_R\|^2_{\dot H^{1/2}}.\end{aligned}$$

En intégrant en temps $s\in[0,T]$, nous concluons que

$$\begin{aligned}A_\phi w_R(x,T)+\int_0^T\int\theta_R\Lambda^s\theta_R\,dx\,ds \leq A_\phi w_{0,R}(x,T)+\left(C+\rho^{-A}\right)\int_0^T\|w_R\|^2_{H^s_{uloc}}\,ds \qquad (3.2)\\ +(\rho^A+\rho_3^B)\left(\int_0^T\|w_R\phi\|^2_{\dot H^{s+1/2}}\,ds+\int_0^T\|\psi_1\theta_R\|^2_{\dot H^{1/2}}\,ds\right)\\ +\rho_3^{-B}\int_0^T\|w_R\|_{\dot H^s_{uloc}}^{\frac{2(3-\gamma-\eta)}{2-\gamma-\eta}}\,ds.\end{aligned}$$

Comme précédemment, nous réécrivons la dernière intégrale à l'aide d'un commutateur de la façon suivante

$$\int_0^T\int\phi\theta_R\Lambda\theta_R\,dx\,ds=\int_0^T\int\Lambda^{1/2}\theta_R[\Lambda^{1/2},\phi]\theta_R\,dx\,ds+\int_0^T\int\phi|\Lambda^{1/2}\theta_R|^2\,dx\,ds. \qquad (3.3)$$

La dernière intégrale de l'égalité ci-dessus fournit un contrôle de la norme $(L^2\dot{H}^{s+1/2})_{uloc}$ de w_R permettant d'absorber les normes $(L^2\dot{H}^{s+1/2})_{uloc}$ de w_R, ou de faàon équivalente, les normes $(L^\infty\dot{H}^{1/2})_{uloc}$ de θ_R apparaissant dans le terme de droite de l'inégalité (cette égalité de norme n'est vérifiée qu'après avoir pris le supremum sur les fonctions test, voir 11). L'autre terme de l'inégalité 3.2 est contrôlé puisque nous avons précédemment établi que pour tout $\mu_1 > 0$ et $\rho_4 > 0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \int \Lambda^{1/2}\theta_R[\Lambda^{1/2},\phi]\theta_R\,dx\,ds\right| &\lesssim (\frac{\mu_1}{2}+\frac{\rho_4}{2})\int_0^T \|\psi\Lambda^{1/2}\theta_R\|^2_{L^2}\,ds \\ &\quad + (\frac{1}{2\mu_1}+\frac{1}{2\rho_4})\int_0^T \|\theta_R\|^2_{L^2_{uloc}}\,ds.\end{aligned}$$

Par conséquent, l'inégalité 3.2 devient

$$\begin{aligned}A_\phi w_R(x,T) + \int_0^T\int \phi|\Lambda^{1/2}\theta_R|^2 dxds &\lesssim A_\phi w_{0,R}(x,T) + \left(C+\rho^{-A}\right)\int_0^T \|w_R\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}}\,ds \\ &\quad + (\rho^A+\rho_3^B)\left(\int_0^T \|w_R\phi\|^2_{\dot{H}^{s+1/2}}\,ds + \int_0^T \|\psi_1\theta_R\|^2_{\dot{H}^{1/2}}\,ds\right) \\ &\quad + (\frac{\mu_1}{2}+\frac{\rho_4}{2})\int_0^T \|\psi\Lambda^{1/2}\theta_R\|^2_{L^2}\,ds \\ &\quad + (\frac{1}{2\mu_1}+\frac{1}{2\rho_4})\int_0^T \|\theta_R\|^2_{L^2_{uloc}}\,ds \\ &\quad + \rho_3^{-B}\int_0^T \|w_R\|^{\frac{2(3-\gamma-\eta)}{2-\gamma-\eta}}_{\dot{H}^s_{uloc}}\,ds.\end{aligned}$$

En prenant le supremum sur tout $\phi \in B_\phi$ et $\psi_1 \in B_{\psi_1}$ dans la dernière inégalité, on obtient

$$\begin{aligned}\|w_R(x,T)\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}} + \|w_R\|^2_{(L^2\dot{H}^{s+1/2})_{uloc}} &\lesssim \|w_{0,R}\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}} \\ &\quad + (C+\rho^{-A}+\frac{1}{2\mu_1}+\frac{1}{2\rho_4})\int_0^T \|w_R\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}}\,ds \\ &\quad + (\rho^A+\rho_3^B+\frac{\mu_1}{2}+\frac{\rho_4}{2})\int_0^T \|w_R\|^2_{\dot{H}^{s+1/2}_{uloc}}\,ds \\ &\quad + \rho_3^{-B}\int_0^T \|w_R\|^{\frac{2(3-\gamma-\eta)}{2-\gamma-\eta}}_{\dot{H}^s_{uloc}}\,ds.\end{aligned}$$

En choisissant ρ, ρ_3, ρ_4 et μ_1 suffisamment petit afin que les normes $(L^2\dot{H}^{s+1/2})_{uloc}$ apparaissant dans le terme de droite de l'inégalité ci-dessus soit absorbées par la norme apparaissant à gauche. Nous obtenons alors

$$\|w_R(x,T)\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}} + \|w_R\|^2_{(L^2\dot{H}^{s+1/2})_{uloc}} \lesssim \|w_{0,R}\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}} + C\int_0^T \|w_R\|^2_{H^s_{uloc}}\,ds + \int_0^T \|w_R\|^{\frac{2(3-\gamma-\eta)}{2-\gamma-\eta}}_{\dot{H}^s_{uloc}}\,ds. \quad (3.4)$$

Donc, pour tout $K \equiv \gamma+\eta \in (0,2)$ nous concluons que

$$\|w_R(x,T)\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}} \leq \|w_{0,R}\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}} + C\int_0^T \left(\|w_R\|^2_{H^s_{uloc}} + \|w_R\|^{\frac{2(3-K)}{2-K}}_{\dot{H}^s_{uloc}}\right) ds. \quad (3.5)$$

Ceci termine la preuve de l'inégalité d'énergie.

□

Comme l'inégalité 3.5 est vraie pour tout $K \in (0,2)$, elle est par conséquent vraie pour $K=1$ par exemple, et dans ce cas on obtient

$$\|w_R(x,T)\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}} \leq \|w_{0,R}\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}} + \int_0^T \left(\|w_R\|^2_{H^s_{uloc}} + \|w_R\|^4_{\dot{H}^s_{uloc}} + C\right) ds.$$

D'après l'inégalité précédente, nous avons

$$\partial_t\|w_R(x,t)\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}} \leq C(\|\theta_0\|_\infty)\|w_R\|^2_{H^s_{uloc}} + \|w_R\|^4_{\dot{H}^s_{uloc}} + C.$$

Posons

$$\Omega(t) \equiv \|w_R(x,t)\|^2_{H^s_{uloc}} + 1,$$

alors,

$$\partial_t\Omega(t) = \partial_t\|w_R(x,t)\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}} \leq C(\|\theta_0\|_\infty)(\|w_R\|^2_{H^s_{uloc}}+1)^2 = C(\|\theta_0\|_\infty)(\Omega(t))^2,$$

En intégrant, on obtient

$$\frac{1}{\Omega(0)} - \frac{1}{\Omega(T)} \leq C(\|\theta_0\|_\infty)T.$$

Nous en déduisons

$$\|w_R\|^2_{L^\infty\dot{H}^s_{uloc}} \leq \left(\frac{1}{1+\|w_{0,R}\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}}} - C(\|\theta_0\|_\infty)T\right)^{-1} \quad (3.6)$$

Donc, nous avons existence de solutions $L^\infty\dot{H}^s_{uloc}$ sur tout intervalle $[0,T^\star)$ où

$$T^\star \equiv \frac{C(\|\theta_0\|_\infty)}{1+\|w_{0,R}\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}}}$$

On doit aussi montrer que $w_R \in (L^2\dot{H}^{s+1/2})_{uloc}$. Nous avons vu précédemment (voir 3.4) que

$$\begin{aligned}\|w_R\|^2_{(L^2\dot{H}^{s+1/2})_{uloc}} &\le \|w_{0,R}\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}} + C\int_0^T \|w_R\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}}\, ds \\ &+ C\int_0^T \|w_R\|^4_{\dot{H}^s_{uloc}}\, ds + CT,\end{aligned}$$

Par conséquent, l'inégalité 3.6 nous permet de conclure que la norme $(L^2\dot{H}^{s+1/2})_{uloc}$ de w_R est contrôlée pour tout $T < C(\|\theta_0\|_\infty)(1 + \|w_{0,R}\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}})^{-1}$.

3.2.3 Passage à la limite ($R \to +\infty, \epsilon \to 0$)

Le passage à la limite faible dans le cas $0 < s < 1/4$ se traite exactement de la même façon que dans le cas $1/4 \le s < 1$ étant donnée que la solution vérifie les mêmes estimations. De ce fait, nous avons les mêmes propriétés de compacités que dans le cas de la dernière section du chapitre 2. L'idée consiste à utiliser le fait que les solutions sont bornées dans des espaces dont le prédual est séparable, ceci associé à l'utilisation d'une version du théorème de compacité de Rellich qui fournit une convergence forte (à une extraction de sous suite près) dans l'espace $(L^2L^2)_{loc}$. Ceci nous permet de montrer que localement en temps on a :

$$\theta \in (L^\infty([0,T], L^2))_{uloc} \cap (L^2_t([0,T], \dot{H}^{1/2}))_{uloc}$$

et

$$w \in (L^\infty([0,T], \dot{H}^s))_{uloc} \cap (L^2_t([0,T], \dot{H}^{s+1/2}))_{uloc}.$$

Et par passage à la limite elle vérifie l'inégalité d'énergie suivante : pour tout $T < \dfrac{1}{1 + C\|w_{0,R}\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}}}$ on a :

$$\|w(x,T)\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}} \le \|w_0\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}} + C\int_0^T \left(\|w\|^2_{\dot{H}^s_{uloc}} + \|w\|^3_{\dot{H}^s_{uloc}} + C\right) ds \tag{3.8}$$

Pour les données initiales, nous conservons la même compacité et donc le passage à la limite fournit de la même manière la convergence (à extraction près) suivante :

$$w_{0,R,\epsilon} \xrightarrow[R\to+\infty,\ \epsilon\to 0]{} w_0 \quad * - faiblement\ dans\ \dot{H}^s_{uloc}.$$

et donc

$$\theta_{0,R,\epsilon} \xrightarrow[R\to+\infty,\ \epsilon\to 0]{} \theta_0 \quad * - faiblement\ dans\ \Lambda^s(\dot{H}^s_{uloc}).$$

Chapitre 4

Une équation de transport 1D donnée par une vitesse et une dissipation non locales

4.1 Introduction de l'équation

Dans ce chapitre nous étudions l'équation de transport 1D avec diffusion fractionnaire

$$(\mathcal{T})_\alpha \quad : \begin{cases} \partial_t\theta - \theta_x\mathcal{H}\theta + \nu\Lambda^\alpha\theta = 0 \\ \theta(0,x) = \theta_0(x) \end{cases}$$

Où $\mathcal{H}$ est la transformation de Hilbert définie par

$$\mathcal{H}\theta \equiv \frac{1}{\pi}PV\int \frac{\theta(y)}{x-y}\,dy,$$

et

$$\Lambda^\alpha\theta \equiv (-\Delta)^{\alpha/2}\theta = C_\alpha P.V.\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\theta(x)-\theta(x-y)}{|y|^{1+\alpha}}dy,$$

Où $C_\alpha > 0$ est une constante positive et $0 < \alpha < 2$ est un paramètre. Dans ce chapitre, nous traiterons uniquement le cas critique $\alpha = 1$ et le cas sous-critique c'est-à-dire $1 < \alpha \leq 2$ dans la première partie. Cependant, dans la dernière partie certains résultats seront vrais pour tout $0 < \alpha < 2$.

4.1.1 Obstacle à l'approche Morrey-Campanato

Dans [CCF], Córdoba, Córdoba et Fontelos ont démontré le résultat suivant d'existence globable lorsque la donnée initiale est positive et dans l'espace de Sobolev H^2.

Théorème 4. *([CCF]) Supposons que $0 \leq \theta_0 \in H^2(\mathbb{R})$, $\nu > 0$ et $\alpha > 1$. Alors, il existe une constante C, qui ne dépend que de θ_0 et ν, telle que pour tour $t \geq 0$:*

$$\|\Lambda^{\frac{1}{2}}\theta\|_{L^2}(t) \leq C \qquad \|\Lambda\theta\|_{L^2}(t) \leq C(1+t) \qquad \|\Delta\theta\|_{L^2}(t) \leq Ce^{Ct^3}$$

Le problème auquel nous nous sommes initialement interéssés était celui de savoir si nous pouvions étendre ce résultat au cas d'une donnée dans l'espace de Morrey-Campanato $H^2_{uloc}(\mathbb{R})$. Autrement dit, a t-on existence globale si $0 \leq \theta_0 \in H^2_{uloc}(\mathbb{R})$?

Le premier obstacle était celui de donner un sens à la transformée de Hilbert dans $H^2_{uloc}(\mathbb{R})$. Le problème du manque de décroissance à l'infini du noyau de convolution de l'opérateur de Hilbert donne une réponse négative. Le problème est le même que celui rencontré dans le cas de l'équation quasi-géostrophique 2D avec données dans $L^2_{uloc}(\mathbb{R}^2)$ étant donné que la transformation de Hilbert n'est rien d'autre que la version 1D des transformées de Riesz. Pour contourner ce problème, l'idée consiste encore une fois à donner de la décroissance au noyau de convolution de la transformée de Hilbert. Ainsi, nous ne supposerons pas $\theta_0 \in H^{s+2}_{uloc}(\mathbb{R})$ mais $\theta_0 = \Lambda^s w$ avec $w \in H^{s+2}_{uloc}(\mathbb{R})$ où $0 < s < 1$. De ce fait, l'opérateur $\mathcal{H}\Lambda^s$ sera bien définie sur $\dot{H}^{s+2}_{uloc}(\mathbb{R})$.

En faisant cela, nous obtenons une équation en w qui s'écrit

$$\partial_t w = -\Lambda^{-s}(\partial_x(\theta\mathcal{H}\theta)) + \Lambda^{-s}(\theta_x\Lambda\theta) - \nu\Lambda^\alpha\theta$$

Le terme $\Lambda^{-s}(\theta_x\Lambda\theta)$ est très irrégulier à cause du potentiel de Riesz Λ^{-s} dont le noyau manque de décroissance à l'infini et le terme produit $\theta_x\mathcal{H}\theta$ ne permet pas d'atténuer le caractère singulier de l'opérateur Λ^{-s}. En fait, un contrôle aurait été possible pour de petites valeurs de s si $\Lambda^{-s}(\phi w)$ avait un signe, mais cela n'est malheureusement pas le cas. Cette contrainte empêche d'avoir un contrôle de la norme $\|w\|_{L^2_{uloc}}$, ce dernier étant crucial, l'approche Morrey-Campanato ne semble donc pas évidente pour cette équation. Evidemment, le problème est directement lié au fait que l'équation n'est pas écrite sous forme divergence. Il serait intéressant par contre de voir si le modèle 1D écrit sous forme divergence permet de construire des solutions faibles globales (voir par exemple l'article de Castro et Córdoba [CaC]), cela devrait se traiter sensiblement comme dans le cas de l'équation quasi-géostrophique, seul le terme où l'hypothèse d'incompressiblité du fluide est nécéssaire devrait changer.

4.1.2 Cas d'une donnée initiale L^2 et remarques

Dans l'article [CCF], les auteurs montrent que la condition de positivité de la donnée initiale implique que la solution garde le même signe en tout temps. Cette condition de signe permet de montrer que l'énergie est conservée ainsi qu'un principe du maximum L^2. Cependant, si nous n'imposons aucune condition de signe sur la donnée initiale on peut quand même montrer que si $\theta_0 \in L^2 \cap L^\infty$ alors la solution reste globalement en temps dans $L_t^\infty L^2$ mais avec une croissance exponentielle.

Pour le voir, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}
\partial_t \int \theta^2 \, dx &= 2\int \theta\theta_x H\theta \, dx - 2\nu \int \theta\Lambda^\alpha\theta \, dx \\
&= -\int \theta^2\Lambda\theta \, dx - 2\nu \int |\Lambda^{\alpha/2}\theta|^2 \, dx \\
&\leq -\int \Lambda^{1/2}(\theta^2)\Lambda^{1/2}\theta \, dx - 2\nu \int |\Lambda^{\alpha/2}\theta|^2 \, dx \\
&\leq C\|\theta\|_{L^\infty}\|\theta\|^2_{\dot{H}^{1/2}} - 2\nu \int |\Lambda^{\alpha/2}\theta|^2 \, dx \\
&\leq C\|\theta_0\|_{L^\infty}\|\theta\|^{\frac{1}{\alpha}}_{\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}}\|\theta\|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}_{L^2} - 2\nu \int |\Lambda^{\alpha/2}\theta|^2 \, dx \\
&\lesssim \frac{1}{\eta^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\|\theta\|_2^2 + \eta^\alpha\|\theta\|^2_{\dot{H}^{\alpha/2}} - 2\nu \int |\Lambda^{\alpha/2}\theta|^2 \, dx
\end{aligned}$$

En choisissant η suffisamment petit pour que la somme des deux derniers termes de la dernière inégalité soit négative, en intégrant en temps $s \in [0,t]$ puis par le lemme de Gronwall on en déduit l'inégalité

$$\|\theta\|^2_{L^\infty L^2} \leq \|\theta_0\|^2_{L^2} e^{ct} \equiv F(t)$$

En fait, dans [CCF], la condition de positivité de la donnée initiale permet de donner un signe au premier terme apparaissant dans la deuxième ligne du calcul précédent. Plus précisement, on a

$$\int \theta^2\Lambda\theta \, dx \geq 0$$

et ceci car

$$\int \theta^2\Lambda\theta \, dx = C\int\int \left(\frac{\theta(x)+\theta(y)}{2}\right)\left(\frac{\theta(x)-\theta(y)}{x-y}\right)^2 \, dx \, dy \geq 0$$

Où l'on a utilisé implicitement le fait que si θ_0 est positive alors la solution le reste en tout temps. Nous avons aussi un principe du maximum L^1 ce dernier est obtenu dans [CCF] :

$$\|\theta\|_{L^1} \leq \|\theta_0\|_{L^1}$$

Ceci vient du fait que

$$\partial_t \int \theta \, dx = \int \theta_x \mathcal{H}\theta \, dx = -\int \theta\Lambda\theta \, dx - \nu \int \Lambda^\alpha\theta \, dx = -\|\Lambda^{1/2}\theta\|^2_{L^2}$$

car, si $\Lambda^\alpha\theta \in L^1$, alors $\displaystyle\int \Lambda^\alpha\theta \; dx = 0$ pour le voir, il suffit d'écrire que, d'une part

$$\widehat{\Lambda^\alpha\theta}(\xi) = |\xi|^\alpha\hat{\theta}(\xi)$$

et d'autre part,

$$\widehat{\Lambda^\alpha\theta}(\xi) = \int e^{-ix.\xi}\Lambda^\alpha\theta(x) \; dx$$

et ensuite d'évaluer ces deux quantités en $\xi = 0$. □

Dans la section suivante, nous traitons le cas d'une donnée initiale θ_0 de signe quelconque.

4.1.3 Remarques dans le cas d'une donnée H^2 sans considération de signe

Dans cette section, nous traitons le cas d'une donnée initiale sans condition de signe et nous nous plaçons dans le cas sous critique $i.e$ $1 < \alpha < 2$. Dans ce cas nous pouvons montrer que si $\theta_0 \in L^2 \cap L^\infty$ alors la solution reste globalement en temps dans $L^\infty_t L^2$ mais avec une croissance exponentielle. Pour le voir, il suffit d'écrire, en utilisant le fait que $\dot{H}^{1/2} \cap L^\infty$ est une algèbre, que

$$\begin{aligned}
\partial_t \int \theta^2 \; dx &= 2\int \theta\theta_x H\theta \; dx - 2\nu\int \theta\Lambda^\alpha\theta \; dx \\
&= -\int \theta^2\Lambda\theta \; dx - 2\nu\int |\Lambda^{\alpha/2}\theta|^2 \; dx \\
&\leq -\int \Lambda^{1/2}(\theta^2)\Lambda^{1/2}\theta \; dx - 2\nu\int |\Lambda^{\alpha/2}\theta|^2 \; dx \\
&\leq C\|\theta\|_{L^\infty}\|\theta\|^2_{\dot{H}^{1/2}} - 2\nu\int |\Lambda^{\alpha/2}\theta|^2 \; dx \\
&\leq C\|\theta_0\|_{L^\infty}\|\theta\|^{\frac{1}{\alpha}}_{\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}}\|\theta\|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}_{L^2} - 2\nu\int |\Lambda^{\alpha/2}\theta|^2 \; dx \\
&\lesssim \frac{1}{\eta^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\|\theta\|_2^2 + \eta^\alpha\|\theta\|^2_{\dot{H}^{\alpha/2}} - 2\nu\int |\Lambda^{\alpha/2}\theta|^2 \; dx
\end{aligned}$$

En choisissant η suffisamment petit pour que la somme des deux derniers termes de la dernière inégalité soit négative, en intégrant en temps $s \in [0, t]$ puis par le lemme de Gronwall on en déduit l'inégalité

$$\|\theta\|^2_{L^\infty L^2} \leq \|\theta_0\|^2_{L^2}e^{ct} \equiv F(t)$$

Comme nous l'avons rappelé dans la section précédente, la conservation de l'énergie n'est valable que sous l'hypothèse de positivité, c'est la raison pour laquelle la donnée initiale est généralement supposée positive. Nous montrons que la condition de positivité n'est pas indispensable si l'on souhaite uniquement avoir un contrôle globale de la solution. Avant d'énoncer le théorème, rappelons que l'on a posé

$$\|\theta_0\|_{L^2}^2 e^{ct} \equiv F(t)$$

Théorème 5. *Supposons que* $\theta_0 \in H^2(\mathbb{R})$, $\nu > 0$ *et* $\alpha > 1$. *Alors, il existe une constante* $C > 0$, *qui ne dépend que de* θ_0 *et* ν, *telle que pour tout* $t > 0$ *nous avons :*

$$\|\Lambda^{1/2}\theta\|_{L^2}^2 \leq \|\Lambda^{1/2}\theta_0\|_{L^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}^2 + C\int_0^t (F(s))^\alpha \, ds$$

Et il existe une constante $K > 0$ *telle que, pour tout* $T > 0$

$$\|\Lambda\theta(x,T)\|_{L^2}^2 \lesssim \|\Lambda\theta_0\|_{L^2}^2 + C\int_0^T (F(s))^K \, ds$$

4.1.4 Démonstration du théorème 4

Le premier point se démontre en utilisant la même astuce que [CCF] pour estimer le terme non linéaire. Plus précisément, on a

$$\begin{aligned}
\partial_t \int |\Lambda^{1/2}\theta|^2 \, dx &= \int \Lambda^{1/2}\theta \Lambda^{1/2}(\theta_x \mathcal{H}\theta) \, dx - \nu \int \Lambda^{1/2}\theta \Lambda^{\alpha+1/2}\theta \, dx \\
&= \int \Lambda\theta \; \theta_x \mathcal{H}\theta \, dx - \nu \int |\Lambda^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}}\theta|^2 \, dx \\
&= -\int \mathcal{H}(\partial_x \mathcal{H}\theta \; \theta_x)\theta \, dx - \nu \int |\Lambda^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}}\theta|^2 \, dx
\end{aligned}$$

Où l'on a utilisé que $\partial_x \mathcal{H}\theta = \Lambda\theta$ et le fait que ∂_x et $\mathcal{H}$ commutent. Ensuite, en utilisant la formule $2\mathcal{H}(f\mathcal{H}f) = f^2 - (\mathcal{H}f)^2$, une intégration par parties ainsi que la continuité de l'opérateur $\mathcal{H}$ sur $\dot{H}^1$, puis enfin en interpolant on trouve

$$\begin{aligned}
\partial_t \int |\Lambda^{1/2}\theta|^2 \, dx &= -\frac{1}{2}\int \theta(\mathcal{H}(\theta_x))^2 \, dx - \frac{1}{2}\int \theta(\theta_x)^2 \, dx - \nu \int |\Lambda^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}}\theta|^2 \, dx \\
&\leq \|\theta\|_{L^\infty}\|\Lambda\theta\|_{L^2}^2 - \nu \int |\Lambda^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}}\theta|^2 \, dx \\
&\leq \|\theta_0\|_{L^\infty}\|\theta\|_{\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}}^{\alpha-1}\|\theta\|_{\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}}}^{2-\alpha} - \nu \int |\Lambda^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}}\theta|^2 \, dx
\end{aligned}$$

Puis, en utilisant Young, on obtient

$$\begin{aligned}
\partial_t \int |\Lambda^{1/2}\theta|^2 \, dx + \nu \int |\Lambda^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}}\theta|^2 \, dx &\leq \eta^{\frac{2}{\alpha-1}}\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\|\theta_0\|_{L^\infty}^{\frac{2}{\alpha-1}} \, \|\theta\|_{\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}}^2 \\
&+ \frac{1}{\eta^{\frac{2}{2-\alpha}}}\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)\|\theta\|_{\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}}}^2
\end{aligned}$$

En choisissant η suffisamment petit et en intégrant en temps $s \in [0,T]$

$$\|\Lambda^{1/2}\theta\|_{L^2}^2 \leq \|\Lambda^{1/2}\theta_0\|_{L^2}^2 + C(\|\theta_0\|_{L^\infty}) \int_0^T \|\Lambda^{\alpha/2}\theta\|_{L^2}^2 \; ds \tag{4.1}$$

Ensuite, on utilise le lemme suivant

Lemme 15. *On a l'inégalité suivante :*

$$C(\nu) \int_0^t \|\Lambda^{\alpha/2}\theta\|_{L^2}^2 \; ds \leq \|\theta_0\|_{L^2}^2 + C(\|\theta_0\|_{L^\infty}) \int_0^t (F(s))^\alpha \; ds$$

Preuve. Nous avons vu précédemment que

$$\partial_t \int \theta^2 \; dx \leq -\int \theta^2 \Lambda\theta \; dx - \nu\|\Lambda^{\alpha/2}\theta\|_{L^2}$$

donc, en faisant une intégration par parties et Young, on trouve

$$\begin{aligned}
\nu\|\Lambda^{\alpha/2}\theta\|_{L^2}^2 &\leq -\partial_t \int \theta^2 \; dx - \int \theta^2 \Lambda\theta \; dx \\
&\leq -\partial_t \int \theta^2 \; dx + 2\|\theta_0\|_{L^\infty}^2 \|\theta\|_{\dot{H}^1} \\
&\leq -\partial_t \int \theta^2 \; dx + 2\|\theta_0\|_{L^\infty}^2 \|\theta\|_{\dot{H}^{\alpha/2}}^{\frac{2}{\alpha}} \|\theta\|_{L^2}^{\frac{\alpha-2}{\alpha}} \\
&\leq -\partial_t \int \theta^2 \; dx + \frac{\delta\alpha}{\alpha}\|\theta\|_{\dot{H}^{\alpha/2}}^2 + C\delta^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}} \; \frac{\alpha-1}{\alpha}\|\theta_0\|_{L^\infty}^{\frac{2\alpha-4}{\alpha-1}} \|\theta\|_{L^2}^\alpha
\end{aligned}$$

En intégrant en temps $s \in [0,t]$, et en choisissant δ suffisamment petit, on obtient

$$C(\nu) \int_0^t \|\Lambda^{\alpha/2}\theta\|_{L^2}^2 \; ds \leq \|\theta_0\|_{L^2} + C(\|\theta_0\|_{L^\infty}) \int_0^t (F(s))^\alpha \; ds$$

Donc l'inégalité (4.1) devient

$$\|\Lambda^{1/2}\theta\|_{L^2}^2 \leq \|\Lambda^{1/2}\theta_0\|_{L^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}^2 + C(\|\theta_0\|_{L^\infty}) \int_0^t (F(s))^\alpha \; ds$$

$\square$

Pour la deuxième estimation, on écrit

$$\frac{1}{2}\,\partial_t \int |\Lambda\theta|^2 \; dx = \int \Lambda^{3/2}\theta \; \Lambda^{1/2}(\theta_x \mathcal{H}\theta) \; dx - \nu\|\Lambda^{1+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^2 \; dx$$

L'objectif est d'estimer la norme $\dot{H}^{1/2}$ de $\theta_x\mathcal{H}\theta$ mais comme $\mathcal{H}\theta$ n'est pas dans L^∞ mais seulement dans BMO, on ne peut pas l'estimer directement. Nous allons l'estimer grâce à l'utilisation de la décomposition de Littlewood-Paley de $\theta_x\mathcal{H}\theta$. On va montrer que $\theta_x\mathcal{H}\theta$ est contrôlé dans $H^{1/2}$. Pour cela, on écrit

$$\theta_x\mathcal{H}\theta = \sum_{j>0} S_j\theta_x \ \Delta_j\mathcal{H}\theta + \sum_{j>0} \Delta_j\theta_x \ S_j\mathcal{H}\theta$$

En utilisant l'inégalité de Bernstein on a

$$\|S_j\theta_x\|_{L^\infty} \leq 2^j\|\theta\|_\infty$$

On a aussi

$$\|\mathcal{H}\theta\|_{L^2} \leq \varepsilon_j 2^{-\frac{3j}{2}}\|\theta\|_{\dot{H}^{3/2}}$$

où $\varepsilon_j \in l^2$.

De plus, comme $\theta \in L^2 \cap L^\infty$ par interpolation, $\theta \in L^q$ pour tout $2 < q < \infty$ et l'on a

$$\|S_j\mathcal{H}\theta\|_{L^q} \leq C\|\theta\|_{L^\infty}^{1-2/q}\|\theta\|_2^{2/q}$$

Soit r le nombre tel que

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2},$$

alors, à nouveau, l'inégalité de Bernstein nous donne

$$\|\Delta_j\theta_x\|_r = \|\Delta_j\theta_x\|_{L^{\frac{2q}{q-2}}} \leq 2^j\|\Delta_j\theta\|_2 2^{j/q} = \varepsilon_j 2^{-j/2}\|\theta\|_{\dot{H}^{3/2+1/q}}$$

où $\varepsilon_j \in l^2$.

En choisissant q tel que, $\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{q} < \dfrac{2+\alpha}{2}$, c'est à dire $\dfrac{2}{q} < \alpha - 1$ (il suffit de choisir q assez grand) on obtient, par interpolation et par Young, pour tout $\gamma \in (0,1)$ et pour tout $\rho > 0$

$$\begin{aligned}
\int \Lambda^{3/2}\theta \ \Lambda^{1/2}(\theta_x\mathcal{H}\theta) \ dx &\leq \|\theta\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}}\|\theta\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}+\frac{1}{q}}}\|\theta\|_{L^\infty}^{1-2/q}\|\theta\|_{L^2}^{2/q} + \|\theta\|_{\dot{H}^{3/2}}^2\|\theta\|_{L^\infty} \\
&\leq \|\theta\|_{\dot{H}^{1+\frac{\alpha}{2}}}^{2\gamma}\|\theta\|_{L^2}^{2-2\gamma+\frac{2}{q}}\|\theta\|_{L^\infty}^{1-2/q} + \|\theta\|_{\dot{H}^{1+\frac{\alpha}{2}}}^{2\gamma}\|\theta\|_{L^2}^{2-2\gamma}\|\theta\|_{L^\infty} \\
&\leq \frac{\rho}{a}\|\theta\|_{\dot{H}^{1+\frac{\alpha}{2}}}^{2a\gamma} + \frac{1}{b\rho}\|\theta\|_{L^2}^{2b-2b\gamma+\frac{2b}{q}}\|\theta\|_{L^\infty}^{b-2b/q} + \frac{\mu}{c}\|\theta\|_{\dot{H}^{1+\frac{\alpha}{2}}}^{2c\gamma} \\
&+ \frac{1}{\mu d}\|\theta\|_{L^2}^{2d-2d\gamma}\|\theta\|_{L^\infty}^d
\end{aligned}$$

Où, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d} = 1$, et $1 \leq a,b,c,d \leq \infty$. En particulier, en prenant

$$0 < \gamma = \frac{1}{a+c} < 1,$$

et en choisissant ρ et μ assez petit on obtient

$$\frac{1}{2}\,\partial_t \int |\Lambda\theta|^2\ dx \lesssim \|\theta\|_{L^2}^{2b-\frac{2b}{a+c}+\frac{2b}{q}} \|\theta\|_{L^\infty}^{b-2b/q} + \|\theta\|_{L^2}^{2d-\frac{2d}{a+c}} \|\theta\|_{L^\infty}^{d}$$

En intégrant en temps $t \in [0,T]$

$$\|\Lambda\theta(x,T)\|_{L^2}^2 \lesssim \|\Lambda\theta_0\|_{L^2}^2 + C(\|\theta_0\|_{L^\infty}) \int_0^T (F(t))^K\ dt$$

où $K = 2b - \dfrac{2b}{a+c} + \dfrac{2b}{q} + 2d - \dfrac{2d}{a+c}$ □

4.2 Existence globale pour des données initiales dans l'espace de Lebesgue à poids $L^2(\omega)$

Dans cette section, nous étudions l'équation de transport lorsque la donnée est dans l'espace de Lebesgue à poids $L^2(w)$ où w est un poids appartennant à la classe $\mathcal{A}_2$ de Muckenhoupt (voir section 4.3.3 ci-dessous). Plus précisement, $w(x) = (1+|x|)^{-\beta}$ avec $0 < \beta < 1$. Autrement dit, nous nous intéressons au problème

$$(\mathcal{T}_\alpha)\ :\ \begin{cases} \partial_t\theta - \theta_x\mathcal{H}\theta + \nu\Lambda^\alpha\theta = 0 \\ \theta(0,x) = \theta_0(x) \in L^2(w(x)dx) \end{cases}$$

Le théorème que nous obtenons est le suivant

Théorème 6. *On suppose que $1 < \alpha < 2$, alors pour toute donnée intiale positive $\theta_0 \in L^2(w(x)dx) \cap L^\infty$ avec $w(x) = (1+|x|)^{-\beta}$, $0 < \beta < 1$. Il existe au moins une solution faible globale θ à l'équation $\mathcal{T}_\alpha$, telle que, pour tout $T > 0$*

$$L^\infty([0,T], L^2(w(x)dx)) \cap L^2([0,T], \dot{H}^{\alpha/2}(w(x)dx))$$

De plus,

$$\|\theta(x,T)\|_{L^2(w)}^2 \leq \|\theta_0\|_{L^2(w)}^2 e^{CT}$$

où $C > 0$ est une constante ne dépendant que de $\|\theta_0\|_{L^\infty}$

La démonstration est basée sur une inégalité d'énergie, cette dernière s'obtient grâce à l'utilisation de quelques lemmes utiles. Ces derniers font intervenir certaines propriétés de la fonction maximale d'Hardy-Littlewood ainsi que les propriétés des poids de Muckenhoupt nous dont nous allons rappeler les définitions et les notations dans la sections suivante.

4.2.1 Fonction maximale d'Hardy-Littlewood, fonctions de la classe de Muckenhoupt

Bien que nous utiliserons ces outils dans le cas unidimensionnel $\mathbb{R}$, nous enonce-rons les rappels dans le cas $\mathbb{R}^n$.

Définition 3. *La fonction maximale d'Hardy-Littlewood d'une fonction f localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$ est définie par*

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy$$

où le supremum est pris sur toutes les boules Q de $\mathbb{R}^n$ et $|Q|$ désigne la mesure de Lebesgue de Q sur $\mathbb{R}^n$.

L'une des propriétés remarquables de la fonction maximale d'Hardy-Littlewood est le fait qu'elle soit continue de $L^p \to L^p$ pour tout $1 < p \leq \infty$, et si $p = 1$ elle est continue de $L^1 \to L^{1,\infty}$ où $\|f\|_{L^{1,\infty}} = \sup\limits_{\lambda>0} \left\{\lambda^{-1}|\{x \in \mathbb{R}^n, |f| > \lambda\}|\right\}$. En fait, la continuité L^p avec $1 < p \leq \infty$ est vérifiée pour toute mesure borélienne μ positive localement finie (i.e mesure de Radon) qui est doublante, c'est-à-dire qu'il existe une constante positive C telle que $\mu(B_R(x)) < C\mu(B_R(x))$. Lorsque μ est la mesure de Lebesgue, $\mathcal{M}f$ est appelée fonction maximale de Hardy-Littlewood.

Dans le cas de l'espace de Lebesgue à poids $L^p(w)$, Muckenhoupt ([Muc]) s'est intéressé aux conditions que w devaient vérifier pour que la fonction maximale soit continue de $L^p(w) \to L^p(w)$, avec $1 < p < \infty$. Il a démontré que la fonction maximale est continue de $L^p(w) \to L^p(w)$, c'est-à-dire il existe une constante positive C_1 telle

$$\int (\mathcal{M}f(x))^p w(x) \, dx \leq C_1 \int |f(x)|^p w(x) \, dx$$

si et seulement si, il existe une constante $C_2 > 0$ telle que pour tout cube Q de $\mathbb{R}^n$

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w \, dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{\frac{1}{1-p}} \, dx\right)^{p-1} \leq C_2$$

Les poids w vérifiant une telle propriété sont appelés poids de Muckenhoupt de classe $\mathcal{A}_p$. En choisissant $f(x) = w(x)^{\frac{1}{1-p}} \mathbb{1}_Q(x)$ on voit qu'une condition nécessaire est que w vérifie la deuxième condition, pour la condition suffisante nous renvoyons à [CM2].

Dans le cas de données L^2, les résultats d'existence pour l'équation $\mathcal{T}_\alpha$ sont très souvent facilités par la continuité L^p, $1 < p < \infty$ de la transformation de Hilbert. De manière plus générale, il est connu depuis le début des années 1970 (voir [HMW]) que les opérateurs de Calderón-Zygmund sont des opérateurs continus sur $L^2(w)$ si et seulement si w est un poids de la classe $\mathcal{A}_2$ de Muckenhoupt. Autrement dit, soit T un opérateur de Calderón-Zygmund alors il existe une constante positive C telle que

$$\|T(f)\|_{L^2(w)} \leq C\|w\|_{\mathcal{A}_2}\|f\|_{L^2(w)}$$

En particulier, la transformée de Hilbert de f est continue de $L^2(w) \to L^2(w)$:

$$\int |\mathcal{H}f(x)|^2 w(x)\ dx \leq C \int |f(x)|^2 w(x)\ dx$$

Un exemple de poids de Muckenhoupt qui est dans la classe $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $1 < p \leq \infty$ est donné par $w(x) = (1+|x|)^\beta$ avec $|\beta| < n(p-1)$ (voir [FS]). Avant d'établir une inégalité d'énergie, nous avons besoin de quelques lemmes utiles.

4.2.2 Quelques lemmes utiles

Généralement, les calculs dans les espaces de Lebesgue à poids font intervenir des commutateurs de Calderón, ces derniers ont l'avantage d'avoir de bonnes propriétés de continuité dans les espaces de Lebesgue classiques L^p mais aussi dans les espaces $L^2(w)$ (au moins pour des poids de la classe $\mathcal{A}_2$ de Muckenhoupt). Dans le prochain lemme, nous montrons que le commutateur conserve de bonnes propriétés dans l'espace de Lebesgue à poids $L^2(1/w)$ où w est le poids de la classe $\mathcal{A}_2$ qui donné par $w(x) = (1+|x|)^{-\beta}$, $0 < \beta < 1$. Cette propriété de continuité est un point crucial dans l'établissement de l'inégalité d'énergie. Plus précisement, nous montrons que l'opérateur T_w défini par $T_w(f) = [\Lambda^{\alpha/2}, w]f$ envoie continûment l'espace $L^2(w)$ dans $L^2(1/w)$, c'est l'objet du lemme suivant

Lemme 16. *Pour tout $0 < \alpha < 2$, l'opérateur*

$$\begin{array}{rccl} T_w : & L^2(w) & \longrightarrow & L^2(1/w) \\ & f & \longmapsto & [\Lambda^{\alpha/2}, w]f \end{array}$$

est continue. Autrement dit, pour tout $f \in L^2(w)$, il existe une constante $C > 0$ telle que,

$$\int \left|[\Lambda^{\alpha/2}, w]f\right|^2 \frac{dx}{w} \leq C \int |f|^2 w\ dx$$

Preuve. Nous allons le démontrer dans $\mathbb{R}^n$. Pour cela il suffit de remarquer que

$$\left|[\Lambda^{\alpha/2}, w]f\right| \leq C_\alpha \int \frac{|w(x)-w(y)|}{|x-y|^{n+\frac{\alpha}{2}}}|f(y)|\ dy$$

et d'utiliser le lemme suivant

Lemme 17. *L'inégalité suivante est valable pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$|w(x) - w(y)| \leq C \min\left(|x-y|, |x-y|^{1/2}\right) \sqrt{w(x)w(y)}$$

où $C > 0$ *est une constante ne dépendant que de* n.

Preuve. On commence par traiter le cas où x et y sont assez loin : $|x-y| > 1$. Si $|x-y| > \dfrac{|x|}{2}$ et $|x-y| > \dfrac{|y|}{2}$, alors

$$\begin{aligned} w(x) - w(y) \leq w(x) + w(y) &\leq \sqrt{w(x)} + \sqrt{w(y)} \\ &\leq \sqrt{w(x)w(y)} \left(\frac{1}{\sqrt{w(x)}} + \frac{1}{\sqrt{w(y)}} \right) \\ &\leq C\sqrt{|x-y|}\sqrt{w(x)w(y)} \end{aligned}$$

Sinon, $|x-y| \leq \dfrac{|x|}{2}$ et $|x-y| \leq \dfrac{|y|}{2}$ et dans ce cas

$$w(x) + w(y) \leq C\sqrt{w(x)w(y)} \leq C\sqrt{w(x)w(y)} \leq C\sqrt{|x-y|}\sqrt{w(x)w(y)}$$

Pour le cas, $|x-y| < 1$ on a

$$|w(x) - w(y)| \leq C|x-y| \sup_{z \in [x,y]} |\nabla w(z)| \leq C'|x-y| \sup_{z\in[x,y]} |w(z)| \leq C''|x-y|\sqrt{w(x)w(y)}$$

□

Revenons à la preuve du lemme 16, en appliquant l'inégalité du précédent lemme, on trouve

$$\left|[\Lambda^{\alpha/2}, w]f\right| \leq C\sqrt{w(x)} \int \min\left(\frac{1}{|x-y|^{n-1+\frac{\alpha}{2}}}, \frac{1}{|x-y|^{n-\frac{1}{2}+\alpha}} \right) \sqrt{w(y)}|f(y)|\, dy$$

En posant

$$B(x) \equiv \min\left(\frac{1}{|x|^{n-1+\frac{\alpha}{2}}}, \frac{1}{|x|^{n-\frac{1}{2}+\alpha}} \right),$$

on remarque que, si $|x| < 1$ alors

$$B(x) = \frac{1}{|x|^{n-1+\frac{\alpha}{2}}} \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

et si $|x| > 1$, alors

$$B(x) = \frac{1}{|x|^{n-\frac{1}{2}+\alpha}} \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

ainsi, par convolution avec $y \mapsto \sqrt{w(y)}f(y) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ on en déduit que

$$\begin{aligned}\int \min\left(\frac{1}{|x-y|^{n-1+\frac{\alpha}{2}}}, \frac{1}{|x-y|^{n-\frac{1}{2}+\alpha}}\right)\sqrt{w(y)}|f(y)|\,dy &\leq \|B\|_{L^1}\|\sqrt{w(y)}f(y)\|_{L^2} \\ &\leq C\|f\|_{L^2(w)}\end{aligned}$$

d'où

$$\left|[\Lambda^{\alpha/2}, w]f\right| \leq C\|f\|_{L^2(w)} \tag{4.2}$$

□

Nous terminons cette section par le lemme suivant

Lemme 18. *Si $w(x) = (1+|x|)^\beta$, $0 < \beta < 1$. Alors, il existe une constante positive C telle que $|\Lambda w| \leq C|w|$*

Preuve. Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}\Lambda w &= \int_{|x-y|<1} \frac{w(x)-w(y)-\nabla w(x).|x-y|}{|x-y|^2}\,dy + \int_{|x-y|>1} \frac{w(x)-w(y)}{|x-y|^2}\,dy \\ &\equiv I_1 + I_2\end{aligned}$$

Les deux intégrales se traitent à peu près comme celle du lemme précédent. Pour I_1 on a

$$|w(x)-w(y)-|x-y|.\nabla w(x)| \leq |x-y|^2 \sup_{z\in[x,y]} |\nabla^2 w(z)|$$

et le fait que

$$|\nabla^2 w(x)| \leq C_\beta |w(x)|$$

permet de conclure que

$$|I_1(x)| \leq C_\beta |w(x)|$$

Concernant la seconde intégrale I_2, on intégre sur $|x-y|<1$, autrement dit x et y sont à une distance d'au moins 1, en notant

$$\Omega_1 = \{|x-y| > \frac{|x|}{2}\} \cap \{|y| > \frac{|x|}{2}\} \text{ et } \Omega_1 = \{|x-y| > \frac{|x|}{2}\} \cap \{|y| < \frac{|x|}{2}\},$$

on a

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_{\Omega_1} \frac{w(x)-w(y)}{|x-y|^2}\,dy + \int_{\Omega_2} \frac{w(x)-w(y)}{|x-y|^2}\,dy \\ &\equiv I_{2,a} + I_{2,b}\end{aligned}$$

$$|I_{2,a}| \leq \frac{1}{|x|^2} w(x) \leq C_\beta (1+|x|)^{-1-\beta} \leq Cw(x)$$

et

$$|I_{2,b}| = \int_{\Omega_2} \frac{dy}{(1+|x|^\beta)} = C_\beta (1+|x|)^{-1-\beta} \leq Cw(x)$$

□

4.2.3 Inégalité d'énergie dans l'espace $L^2(\omega)$

Soit θ une solution de l'équation $\mathcal{T}_\alpha$ alors,

$$\partial_t \int \frac{\theta^2}{2} w\ dx = \int \theta \partial_x \theta \mathcal{H}\theta w\ dx - \nu \int w\theta \Lambda^\alpha \theta\ dx$$

donc

$$\partial_t \int \frac{\theta^2}{2} w\ dx = \int \theta \partial_x \theta \mathcal{H}\theta w\ dx - \nu \int \Lambda^{\alpha/2}\theta [w, \Lambda^{\alpha/2}]\theta\ dx - \nu \int |\Lambda^{\alpha/2}\theta|^2 w\ dx$$

On a donc

$$\begin{aligned}\partial_t \int \frac{\theta^2}{2} w\ dx &= -\int \theta^2 \Lambda\theta w\ dx - \int \theta \mathcal{H}\theta w_x\ dx - \nu \int \Lambda^{\alpha/2}\theta [w, \Lambda^{\alpha/2}]\theta\ dx \\ &- \nu \int |\Lambda^{\alpha/2}\theta|^2 w\ dx\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Córdoba et Córdoba : $\Lambda\theta^3 \leq 3\theta^2\Lambda\theta$ (où l'hypothèse de positivité permet d'assurer la convexité de $\theta \mapsto \theta^3$), puis en intégrant par parties, et en utilisant le fait que $w_x < w$, on obtient

$$\begin{aligned}\partial_t \int \frac{\theta^2}{2} w\ dx \leq &- \frac{1}{2}\int \theta^3 \Lambda w\ dx - \int \sqrt{w}\theta \mathcal{H}\theta \sqrt{w}\ dx \\ &-\nu \int \sqrt{w}\Lambda^{\alpha/2}\theta [\Lambda^{\alpha/2}, w]\theta\ \frac{dx}{\sqrt{w}} - \nu \int |\Lambda^{\alpha/2}\theta|^2 w\ dx\end{aligned}$$

En remarquant que $\|\theta\|_{L^2(w)} = \|\theta\sqrt{w}\|_2$ et en utilisant le lemme 16 et 18, ainsi que le principe du maximum L^∞ et la continuité de l'opérateur de Hilbert sur $L^2(w)$ (car $w \in \mathcal{A}_2$), on en déduit que

$$\partial_t \int \frac{\theta^2}{2} w\ dx \leq \|\theta_0\|_{L^\infty} \|\theta\|^2_{L(w)} + \|\theta\|^2_{L^2(w)} + \|\Lambda^{\alpha/2}\theta\|_{L^2(w)} \|\theta\|_{L^2(w)} - \nu \|\Lambda^{\alpha/2}\theta\|^2_{L^2(w)}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient, pour tout $\eta > 0$

$$\partial_t \int \frac{\theta^2}{2} w\ dx \leq \left(1 + \frac{2}{\eta} + \|\theta_0\|_{L^\infty}\right) \|\theta\|^2_{L^2(w)} + \|\Lambda^{\alpha/2}\theta\|^2_{L^2(w)} \left(\frac{\eta}{2} - \nu\right) \tag{4.3}$$

En choisissant $\eta < 2\nu$, on trouve

$$\partial_t \int \frac{\theta^2}{2} w\ dx \leq (C + \|\theta_0\|_{L^\infty}) \|\theta\|^2_{L^2(w)}$$

En intégrant en temps $s \in [0, T]$

$$\|\theta(x,T)\|^2_{L^2(w)} \leq \|\theta_0\|^2_{L^2(w)} + (C + \|\theta_0\|_{L^\infty}) \int_0^T \|\theta(x,s)\|^2_{L^2(w)}\ ds$$

Par Gronwall,

$$\|\theta(x,T)\|^2_{L^2(w)} \leq \|\theta_0\|^2_{L^2(w)} e^{CT}$$

où $C > 0$ ne dépend que de $\|\theta_0\|_{L^\infty}$.

Autrement dit, pour tout $T < \infty$ et pour tout $0 < \alpha < 2$, on a

$$\sup_{0<t<T} \int \theta^2 w \, dx < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^T \int |\Lambda^{\alpha/2}\theta|^2 w \, dx < \infty$$

Remarque 12. *Le terme de viscosité sert généralement à pouvoir contrôler le terme non linéaire en régularisant l'équation, dans le cas précédent, il ne sert qu'à faire apparaître la norme $\dot{H}^{\alpha/2}$ et de montrer qu'elle est globalement contrôlée aussi.*

4.3 Un exemple générique d'équations de transport non locales

Dans cette section, nous donnons un exemple générique de classe d'équations de transport données par une vitesse non locale pour laquelle le résultat d'existence globale dans l'espace à poids $L^2(w)$, où w est le poids de classe $\mathcal{A}_2$ de Muckenhoupt considéré précédemment est vérifié. Considérons la famille d'équations de transport non locales sur $\mathbb{R}^n$, où $n \geq 2$ suivante

$$(\mathcal{G}_\alpha) \ : \begin{cases} \partial_t\theta = -\nabla.(T(\theta)\theta) - \nu\Lambda^\alpha\theta \\ \nabla.T(\theta) = 0 \\ \theta(0,x) = \theta_0(x) \in L^2(w) \end{cases}$$

Théorème 7. *Pour toute donnée initiale positive $\theta_0 \in L^2(w) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ il existe au moins une solution faible θ à l'équation $\mathcal{G}_\alpha$, telle que, pour tout $T > 0$*

$$L^\infty([0,T], L^2(w(x)dx)) \cap L^2([0,T], \dot{H}^{\alpha/2}(w(x)dx))$$

De plus,

$$\|\theta(x,T)\|^2_{L^2(w)} \leq \|\theta_0\|^2_{L^2(w)} e^{CT}$$

où $C > 0$ est une constante ne dépendant que de $\|\theta_0\|_{L^\infty}$

Preuve. On a

$$\partial_t \int w\theta^2 \, dx \ = \ -\int w\theta\nabla.(T(\theta)\theta) \, dx - \int w\theta\Lambda^\alpha\theta \, dx$$

Or $u = T(\theta)$ est de divergence nulle, donc

$$\begin{aligned}
-\int w\theta\nabla.(T(\theta)\theta)\ dx &= \int \nabla.(w\theta).T(\theta)\theta\ dx \\
&= \int w\nabla(\theta).T(\theta)\theta\ dx + \int \theta\nabla\phi.T(\theta)\theta\ dx \\
&= \int w\theta\nabla.(\theta T(\theta))\ dx + \int \theta^2 T(\theta).\nabla w\ dx
\end{aligned}$$

et donc

$$-\int w\theta\nabla.(T(\theta)\theta)\ dx = \frac{1}{2}\int \theta^2 T(\theta).\nabla w\ dx$$

comme,

$$|\nabla w| < C_\beta |w|$$

On en déduit les estimations suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\partial_t \int w\theta^2\ dx &= \int \theta.\sqrt{w}\theta.\sqrt{w}T(\theta)\nabla w\ dx - \nu\int \Lambda^{\alpha/2}\theta[w,\Lambda^{\alpha/2}]\theta\ dx \\
&- \nu\int |\Lambda^{\alpha/2}\theta|^2 w\ dx \\
&= \int \theta.\sqrt{w}\theta.\sqrt{w}T(\theta)\nabla w\ dx - \nu\int \sqrt{w}\Lambda^{\alpha/2}\theta[\Lambda^{\alpha/2},w]\theta\ \frac{dx}{\sqrt{w}} \\
&\quad -\nu\int |\Lambda^{\alpha/2}\theta|^2 w\ dx \\
&\le C_\beta\ \|\theta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\|\sqrt{w}\theta\|_{L^2}\|\sqrt{w}T(\theta)\|_{L^2} + \|\Lambda^{\alpha/2}\theta\|_{L^2(w)} \\
&\quad - \|\theta\|_{L^2(w)} - \nu\|\Lambda^{\alpha/2}\theta\|^2_{L^2(w)}
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le lemme 16 et le fait que T est continue de $L^2(w)$ dans $L^2(w)$ du fait qu'il est un opérateur de Calderón-Zygmund. La conclusion est la même que celle de la section (4.4) précédente. □

Remarque 13. *Un exemple d'équation vérifiant les hypothèses du théorème précédent est le cas de l'équation quasi-géostrophique dissipative* ($0 < \alpha < 2$) *ou conservative étudiée au chapitre 2 et 3.*

Sans l'hypothèse $\nabla.T(\theta) = 0$, le théorème est encore vrai, la dissipation est utile pour contrôler le terme non linéaire, cependant le résultat n'est vrai que dans le cas sous-critique $1 < \alpha < 2$ et dans le cas critique $\alpha = 1$ si $\|\theta\|_{L^\infty}$ est suffisamment petit. En effet, considérons la famille d'équation suivante

$$(\tilde{\mathcal{G}}_\alpha)\ :\ \begin{cases} \partial_t\theta = -T(\theta).\nabla\theta - \nu\Lambda^\alpha\theta \\ \theta(0,x) = \theta_0(x) \in L^2(w)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

En multipliant l'équation par $w\theta$ et en intégrant en espace, on obtient l'égalité suivante

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\partial_t \int \frac{\theta^2}{2}\, w\, dx &= -\int w|\Lambda^{\alpha/2}\theta|^2\, dx + \int \Lambda^{\alpha/2}\theta[\Lambda^{\alpha/2}, w]\theta\, dx - \int \theta\nabla\theta.T\theta\, dx \\
&\leq -\int w|\Lambda^{\alpha/2}\theta|^2\, dx + \int \sqrt{w}|\Lambda^{\alpha/2}\theta|\,|[w,\Lambda^{\alpha/2}]\theta|\,\frac{dx}{\sqrt{w}} \\
&\quad + \|\theta_0\|_{L^\infty}\int |\sqrt{w}\nabla\theta|\,|\sqrt{w}T\theta|\, dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\partial_t\|\theta\|^2_{L^2(w)} &\leq -\|\Lambda^{\alpha/2}\theta\|^2_{L^2(w)}\|[w,\Lambda^{\alpha/2}]\theta\|_{L^2(1/w)} + \|\theta_0\|_{L^\infty}\,\|\nabla\theta\|_{L^2(w)}\|T\theta\|_{L^2(w)} \\
&\quad - \int w|\Lambda^{\alpha/2}\theta|^2\, dx
\end{aligned} \tag{4.4}$$

En utilisant le lemme 16 de continuité du commutateur ainsi que la propriété de continuité de l'opérateur T sur $L^2(w)$, on obtient

$$\frac{1}{2}\partial_t\|\theta\|^2_{L^2(w)} + \|\Lambda^{\alpha/2}\theta\|^2_{L^2(w)} \leq -\|\Lambda^{\alpha/2}\theta\|^2_{L^2(w)}\|\theta\|_{L^2(w)} + \|\theta_0\|_{L^\infty}\,\|\nabla\theta\|_{L^2(w)}\|\theta\|_{L^2(w)}$$

Afin d'interpoler dans les espaces de Sobolev à poids nous ferons usage du lemme suivant

Lemme 19. *Pour tout $1 < \alpha < 2$, on a*

$$\int |\Lambda\theta|^2\, wdx \leq C\left(\int |\theta|^2\, wdx\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\left(\int |\Lambda^\alpha\theta|^2\, wdx\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Preuve : Soit $e^{t\Delta}$ le semi-groupe de la chaleur. On écrit $\Lambda\theta = \int_0^\infty e^{t\Delta}\Lambda^3\theta\, dt$ (pour le voir il suffit de remarquer que $\Lambda^3\theta = -\Lambda(\Delta\theta)$ puis d'intégrer par parties) on a

$$|e^{t\Delta}\Lambda^3\theta(x)| \leq C\min(t^{-\frac{3}{2}}\mathcal{M}\theta(x), t^{\frac{-3+\alpha}{2}}\mathcal{M}\Lambda^\alpha\theta(x))$$

Donc

$$|\Lambda\theta(x)| \leq C\int_0^\infty \min\left(t^{-\frac{1}{2}}\mathcal{M}\theta(x), t^{\frac{\alpha-1}{2}}\mathcal{M}\Lambda^\alpha\theta(x)\right)\frac{dt}{t} = C'\mathcal{M}\theta(x)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\mathcal{M}\Lambda^\alpha\theta(x)^{\frac{1}{\alpha}}$$

□

Remarque 14. *En utilisant le fait que $\mathcal{R}\Lambda = \nabla$ et les propriétés de continuité de $\mathcal{R}$, on a aussi*

$$\int |\nabla\theta|^2\, wdx \leq C\left(\int |\theta|^2 wdx\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\left(\int |\Lambda^\alpha\theta|^2 w\, dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Donc l'inégalité (4.4) devient

$$\frac{1}{2}\partial_t\|\theta\|^2_{L^2(w)} \leq -\|\Lambda^{\alpha/2}\theta\|^2_{L^2(w)} + C\|\theta_0\|_{L^\infty}\|\Lambda^{\alpha/2}\theta\|^{1/\alpha}_{L^2(w)}\|\theta\|^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}}_{L^2(w)}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on trouve

$$\frac{1}{2}\partial_t\|\theta\|^2_{L^2(w)} \leq -\|\Lambda^{\alpha/2}\theta\|^2_{L^2(w)} + C\left(1 + \|\theta_0\|^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}}_{\infty}\right)\|\theta\|^2_{L^2(w)}$$

Donc, si $\theta_0 \in L^2(w\ dx)$ on obtient que, pour tout $T < \infty$

$$\sup_{0<t<T}\int \theta^2 w\ dx < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^T\int |\Lambda^{\alpha/2}\theta|^2 w\ dx < \infty$$

$\square$

Annexe A1 : Exemple d'utilisation de la technique de De Giorgi

En 1957, De Giorgi a trouvé une méthode permettant de montrer que, sous certaines conditions, les solutions des équations elliptiques à coefficients discontinues étaient bornées et même régulières. Le problème consistant à montrer la régularité des équations elliptiques à coefficients peu réguliers faisait l'objet du 19ème problème de Hilbert. Plus précisément, le problème proposé par Hilbert était de montrer que les minimiseurs locaux de la fonctionnelle

$$\mathcal{L}(w) = \int_{\Omega} F(\nabla w)\ dx$$

étaient réguliers sous l'hypothèse que $t \to F(t)$ est régulière. Un minimiseur est dit local s'il vérifie l'inégalité

$$\mathcal{L}(w) \leq \mathcal{L}(w + \phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$$

Ces minimiseurs locaux sont solutions de l'équation d'Euler Lagrange (voir page 114 théorème 2.100 du livre [Maly])

$$\mathrm{div}(F'(\nabla w)) = 0, \quad x \in \Omega$$

Ce problème a été résolu par De Giorgi dans [Deg]. La technique de De Giorgi consiste à montrer dans un premier temps que la solution est bornée en introduisant la solution tronquée $\theta_k = (u - C_k)_+$ et une inégalité d'énergie "non lineaire" vérifiée par la solution tronquée, l'objectif est ensuite de montrer que cette suite tend vers 0, ce dernier point n'apparaît pas dans la littérature et nous le détaillerons dans cet annexe. Ensuite, il montre que la solution est $\mathcal{C}^\alpha$ puis que c'est une solution classique. Pour le passage de L^∞ à la régularité $\mathcal{C}^\alpha$ nous renvoyons au chapitre 1 du livre [CGGKV] ou à l'annexe de l'article de Constantin et Wu [CW3]. Notons que cette technique a récemment été utilisée pour d'autres équations paraboliques, par exemples, dans des modèles de type Keller-Segel par Perthame et Vasseur [PV]. Nous presentons ci dessous un détails du passage de L^2 à L^∞ concernant les solutions faibles de l'équation quasi-géostrophique dans le cas critique traité dans [CV].

Le point de départ est l'étude de l'équation de transport suivante

$$\begin{cases} \partial_t\theta(x,t) + v.\nabla\theta + \Lambda\theta = 0 \\ v \in L^\infty_t BMO(\mathbb{R}^n) \\ \theta(0,x) = \theta_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

En suivant la même démarche que De Giorgi dans [Deg], Caffarelli et Vasseur introduisent la solution tronquée $\theta_k = (u - C_k)_+$ avec $C_k = M(1 - 2^{-k})$ où M est une constante positive qui sera choisie plus tard. En multipliant l'équation de transport par θ_k et en intégrant sur $\mathbb{R}^N$ on trouve :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \partial_t\theta.\theta_k \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} v \cdot \nabla\theta.\theta_k \, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} \Lambda\theta.\theta_k \, dx$$

Comme v est de divergence nulle l'égalité devient

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \partial_t[\theta_k]^2 \, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} \Lambda\theta.\theta_k \, dx, \qquad (5.1)$$

Pour estimer le terme de droite de l'égalité (5.1) on a besoin du lemme de A.Córdoba et D.Córdoba

Lemme 20. *Pour toute fonction convexe ϕ on a l'inégalité suivante :*

$$-\phi'(\theta)\Lambda\theta \leq -\Lambda(\phi(\theta)).$$

En appliquant ce lemme à la fonction :

$$\phi_k(\theta) = \left[\theta - M\left(1 - 2^{-k}\right)\right]_+ = \theta_k$$

qui est convexe et a pour dérivée $\phi_k'(\theta) = \mathbb{1}_{\{\theta > M(1-2^{-k})\}}$. On remarque que :

$$-\Lambda\theta.\theta_k = -\phi_k'(\theta)\Lambda\theta.\theta_k \leqslant -\Lambda\left(\phi_k\left(\theta\right)\right).\theta_k = -\Lambda(\theta_k).\theta_k$$

On arrive à la majoration suivante :

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \partial_t[\theta_k]^2 \, dx \leqslant -\int_{\mathbb{R}^N} \Lambda(\theta_k).\theta_k \, dx,$$

qui se réécrit :

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^N} [\theta_k]^2 \, dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} \Lambda(\theta_k).\theta_k \, dx \leqslant 0 \qquad (5.2)$$

Soit $t_0 > 0$ fixé, considérons la suite croissante définie par : $T_k = t_0(1-2^{-k}), k \geqslant 0$ qui approche t_0 quand $k \to \infty$. En intégrant en temps l'inégalité (5.2) entre $[s,t]$ on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^N} {\theta_k}^2(x,t)\,dx\,dt + 2\int_s^t \int_{\mathbb{R}^N} \theta_k \Lambda \theta_k \,dx\,dt \leq \int_{\mathbb{R}^N} {\theta_k}^2(x,s)\,dx\,dt$$

On prend ensuite la moyenne sur $s \in [T_{k-1}, T_k]$, en remarquant que $\dfrac{1}{T_k - T_{k-1}} = \dfrac{2^k}{t_0}$, on trouve :

$$\int_{\mathbb{R}^N} {\theta_k}^2(x,t)\,dx\,dt + 2\int_s^t \int_{\mathbb{R}^N} \theta_k \Lambda \theta_k \,dx\,dt \leq \frac{2^k}{t_0}\int_{T_{k-1}}^{T_k} \int_{\mathbb{R}^N} {\theta_k}^2(x,s)\,dx\,ds$$

Prenons le sup sur $t \in [T_k, \infty[$:

$$\sup_{t\in[T_k,\infty[} \int_{\mathbb{R}^N} {\theta_k}^2(x,s)\,dx\,ds + 2\int_{T_k}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \theta_k \Lambda \theta_k \,dx\,ds \leq \frac{2^k}{t_0}\int_{T_{k-1}}^{T_k} \int_{\mathbb{R}^N} {\theta_k}^2(x,s)\,dx\,ds$$

Notons U_k le terme de gauche dans la dernière inégalité, autrement dit :

$$U_k \equiv \sup_{t\geq T_k} \left(\int_{\mathbb{R}^N} {\theta_k}^2(x,t)\,dx \right) + 2\int_{T_k}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \theta_k \Lambda \theta_k \,dx\,dt$$

On a : ${\theta_k}^2 \leqslant \theta_{k-1}^2 . \mathbb{1}_{\theta_k > 0}$. En effet,

$$\theta_{k-1} = [\theta - M + 2M2^{-k}]_+$$

or

$$\mathbb{1}_{\theta_k>0} . \theta_k = \theta - M(1 - 2^{-k})$$

et donc

$$\mathbb{1}_{\theta_k>0} . \theta_{k-1} = [\ \underbrace{\theta - M}_{=\theta_k + M2^{-k}}\ + 2M2^{-k}]_+$$

d'où,

$$\mathbb{1}_{\theta_k>0} . \theta_{k-1}^2 = [\theta_k - M2^{-k} + 2M2^{-k}]_+^2 = [\theta_k + \underbrace{M2^{-k}}_{>0}]_+^2 > {\theta_k}^2$$

donc

$$ {\theta_k}^2 \leqslant \theta_{k-1}^2 . \mathbb{1}_{\theta_k>0}$$

On en déduit l'inégalité :

$$U_k \leq \frac{2^k}{t_0}\int_{T_{k-1}}^{T_k} \int_{\mathbb{R}^N} {\theta_k}^2(x,s)\,dx\,ds \leqslant \frac{2^{k+1}}{t_0}\int_{T_{k-1}}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \theta_{k-1}^2 \mathbb{1}_{\theta_k>0}\,dx\,dt$$

or,

$$\mathbb{1}_{\theta_k>0} \leqslant \left(\frac{2^k}{M} \theta_{k-1} \right)^{\frac{2}{N}}$$

En effet, si $\theta_k > 0$ alors $\mathbb{1}_{\theta_k>0} = 1$, et dans ce cas :

$$\theta_{k-1} = [\theta_k + M2^{-k}]_+ > M2^{-k}$$

autrement dit,

$$1 < \left(\frac{2^k}{M}\theta_{k-1}\right) \text{ donc } 1 < \left(\frac{2^k}{M}\theta_{k-1}\right)^{\frac{2}{N}}$$

Sinon $\mathbb{1}_{\theta_k>0} = 0$, mais comme $0 \leqslant \left(\frac{2^k}{M}\theta_{k-1}\right)^{\frac{2}{N}}$ on en déduit que

$$\mathbb{1}_{\theta_k>0} \leqslant \left(\frac{2^k}{M}\theta_{k-1}\right)^{\frac{2}{N}}$$

On arrive donc à l'inégalité :

$$\begin{aligned} U_k \leq \frac{2^{k+1}}{t_0}\int_{T_{k-1}}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\theta_{k-1}^2\mathbb{1}_{\theta_k>0}\,dx\,dt &\leq \frac{2^{k+1}}{t_0}\int_{T_{k-1}}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\theta_{k-1}^2\left(\frac{2^k}{M}\theta_{k-1}\right)^{\frac{2}{N}}\,dx\,dt \\ &= \frac{2^{k+1+\frac{2k}{N}}}{t_0M^{\frac{2}{N}}}\int_{T_{k-1}}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\theta_{k-1}^{2+\frac{2}{N}}\,dx\,dt \\ &= \frac{2.2^{\frac{N+2}{N}k}}{t_0M^{\frac{2}{N}}}\|\theta_{k-1}\|_{L^{\frac{2(N+1)}{N}}(]T_{k-1},\infty[\times\mathbb{R}^N)}^{\frac{2(N+1)}{N}} \end{aligned}$$

Or d'après l'inégalité de Sobolev, puis Hölder :

$$U_{k-1} \geq C\|\theta_{k-1}\|^2_{L^{\frac{2(N+1)}{N}}(]T_{k-1},\infty[\times\mathbb{R}^N)} \text{ donc } U_{k-1}^{\frac{N+1}{N}} \geq C\|\theta_{k-1}\|_{L^{\frac{2(N+1)}{N}}(]T_{k-1},\infty[\times\mathbb{R}^N)}^{\frac{2(N+1)}{N}}$$

D'où :

$$U_k \leq 2C\frac{2^{\frac{N+2}{N}k}}{t_0M^{\frac{2}{N}}}U_{k-1}^{\frac{N+1}{N}} \qquad (5.3)$$

Ce type d'estimation non linéaire ainsi que l'inégalité de Sobolev sont indispensables dans la technique de De Giorgi (voir [CGGKV]). En particulier, les deux inégalités associées impliquent nécessairement que U_k tend vers 0 et ceci permet de conclure que $\theta \in L^\infty$, c'est l'objet du lemme suivant

Lemme 21. $U_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Preuve. □

Afin d'alléger les notations, on commence par poser $\gamma = \dfrac{N+1}{N}$ et $\gamma' = \dfrac{N+2}{N}$. Ainsi, l'inégalité (5.3) se réecrit

$$U_k \leqslant 2C\frac{2^{\gamma' k}}{t_0 M^{\frac{2}{N}}} U_{k-1}^{\gamma}$$

En utilisant la récurrence de l'inégalité précédente on trouve :

$$\begin{aligned}
U_k \leqslant 2C\frac{2^{\gamma' k}}{t_0 M^{\frac{2}{N}}}\left(2C\frac{2^{\gamma'(k-1)}}{t_0 M^{\frac{2}{N}}}U_{k-2}^{\gamma}\right)^{\gamma} & \leqslant 2C\frac{2^{\gamma' k}}{t_0 M^{\frac{2}{N}}}(2C)^{\gamma}\frac{2^{\gamma'\gamma(k-1)}}{\left(t_0 M^{\frac{2}{N}}\right)^{\gamma}}U_{k-3}^{\gamma^2} \\
& \vdots \\
& \vdots \\
& \leqslant (2C)^{1+\gamma+\ldots+\gamma^{k-1}}\frac{2^{\gamma'\left(k+\gamma(k-1)+\ldots+\gamma^{k-1}\right)}}{\left(t_0 M^{\frac{2}{N}}\right)^{1+\ldots+\gamma^{k-1}}}U_0^{\gamma^k} \\
& = (2C)^{\frac{\left(\gamma^k-1\right)}{\gamma-1}}\frac{2^{\gamma'\sum_{p=0}^{k-1}(k-p)\gamma^p}}{\left(t_0 M^{\frac{2}{N}}\right)^{N\left(\gamma^k-1\right)}}U_0^{\gamma^k} \\
& = (2C)^{N\left(\gamma^k-1\right)}\frac{2^{\gamma'\sum_{p=1}^{k}p\gamma^{k-p}}}{\left(t_0 M^{\frac{2}{N}}\right)^{N\left(\gamma^k-1\right)}}U_0^{\gamma^k}
\end{aligned}$$

D'où :

$$U_k \leqslant (2C)^{N\left(\gamma^k-1\right)}\frac{2^{\gamma'\gamma^k\sum_{p=1}^{k}\frac{p}{\gamma^p}}}{\left(t_0 M^{\frac{2}{N}}\right)^{N\left(\gamma^k-1\right)}}U_0^{\gamma^k} \qquad (5.4)$$

Or, la série $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{p}{\gamma^p}$ converge, en effet, en utilisant le critère de d'Alembert on voit que le rayon de convergence de la série $\sum_{p=1}^{k} p x^p$ vaut 1, et comme $\frac{1}{\gamma} < 1$, on en déduit que la série $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{p}{\gamma^p}$ converge. On peut estimer le comportement du terme de droite de (5.4) lorsque $k \to \infty$. Dans la suite on note $f \sim g$ si f et g ont le même comportement à l'infini. On a $\gamma^k \sum_{p=1}^{k} \frac{p}{\gamma^p} \underset{k\to\infty}{\sim} \gamma^k$. Plus précisément, on a

$$(2C)^{N\left(\gamma^k-1\right)} \frac{2^{\gamma'\gamma^k \sum_{p=1}^{k} \frac{p}{\gamma^p}}}{\left(t_0 M^{\frac{2}{N}}\right)^{N\left(\gamma^k-1\right)}} U_0^{\gamma^k} \underset{k\to\infty}{\sim} \left(\frac{(2C)^N}{t_0^N M^2} 2^{\gamma'}.U_0\right)^{\gamma^k}$$

On choisit M et t_0 assez grand (dépendant de U_0) pour que :

$$\left(\frac{(2C)^N}{t_0^N M^2} 2^{\gamma'}.U_0\right) < 1 \tag{4.4}$$

Ainsi, comme $\gamma > 1$,

$$\left(\frac{(2C)^N}{t_0^N M^2} 2^{\gamma'}.U_0\right)^{\gamma^k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Et donc :

$$U_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Or,

$$U_{k-1} \geq C \|\theta_{k-1}\|^2_{L^{\frac{2(N+1)}{N}}(]T_{k-1},\infty[\times\mathbb{R}^N)}$$

Donc en passant à la limite quand $k \longrightarrow +\infty$ on trouve par le théorème de convergence dominée :

$$0 \geq C \| \left(\theta - M\right)_+ \|^2_{L^{\frac{2(N+1)}{N}}(]t_0,\infty[\times\mathbb{R}^N)}$$

Ceci implique que :

$$\| \left(\theta - M\right)_+ \|^2_{L^{\frac{2(N+1)}{N}}(]t_0,\infty[\times\mathbb{R}^N)} = 0$$

donc :

$$\left(\theta - M\right)_+ = 0 \qquad \text{presque partout en } (t,x) \in]t_0,\infty[\times\mathbb{R}^N$$

par conséquent :

$$\theta(t,x) - M \leq 0 \qquad \text{presque partout en } (t,x) \in]t_0,\infty[\times\mathbb{R}^N$$

d'où :

$$\theta(t,x) \leq M \qquad \text{presque partout en } (t,x) \in]t_0,\infty[\times\mathbb{R}^N$$

En appliquant la technique de De Giorgi à $-\theta$, on trouve finalement :

$$|\theta(t,x)| \leqslant M \qquad \text{presque partout en } (t,x) \in]t_0,\infty[\times\mathbb{R}^N$$

□

Annexe A2 : Décomposition de Littlewood-Paley et inégalités

4.4 Décomposition de Littelwood-Paley

Dans cette section, on rapelle la décomposition de Littelwood-Paley d'une distribution $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Pour cela, on commence par donner la définition des blocs dyadiques de la distribution f. On introduit deux fonctions tests, une première fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ positive et à support dans une boule de rayon $1/2$ centrée en l'origine, à partir de laquelle, on construit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ de la manière suivante

$$\psi(\xi) = \phi(\xi/2) - \phi(\xi)$$

On définit ensuite, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, les multiplicateurs de Fourier S_j et Δ_j (appelé j-ème bloc dyadique) par

$$\widehat{S_j f}(\xi) = \phi(\frac{\xi}{2^j})\widehat{f}(\xi) \quad \text{et} \quad \widehat{\Delta_j f}(\xi) = \psi(\frac{\xi}{2^j})\widehat{S_j f}(\xi)$$

On appel décomposition de Littlewood-Paley de f l'égalité

$$f = S_N + \sum_{j \geq N} \Delta_j f \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

Si de plus,

$$S_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

on obtient, pour toute distribution $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (modulo les polynômes) la version homogène de la décomposition de Littlewood-Paley :

$$f = \sum_{j \geq N} \Delta_j f \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

Par abus de langage, nous dirons la décomposition bien qu'elle n'est pas unique étant donné qu'il y a autant de décomposition de Littlewood-Paley que de choix de fonctions tests $\phi \in \mathcal{D}$. L'intérêt d'une telle décomposition vient du fait que l'opérateur de dérivation à de bonnes propriétés dans les estimations, plus précisement, on a les inégalités de Bernstein.

4.5 Inégalités de Bernstein et espaces de Besov

On commence par rappeler les inégalités de Bernstein

Lemme 22. *Si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $(s, j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, et pour tout $1 \leq p \leq q \leq \infty$ on a*

$$2^{js}\|\Delta_j f\|_{L^p} \lesssim \|\Lambda^s \Delta_j f\|_p \lesssim 2^{js}\|\Delta_j f\|_{L^p}$$

$$\|\Lambda^s S_j f\|_{L^p} \lesssim 2^{js}\|S_j f\|_{L^p}$$

Il est souvent plus judicieux dans les estimations d'utiliser la définition des espaces de Sobolev définis à l'aide de la décomposition de Littlewood-Paley. Concernant l'espace de Sobolev non homogène, on a la définition suivante :

Définition 4. *Pour tout réels s, on dit que $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si :*

$$S_0 f \in L^2 \quad et \quad \sum_{j\geq 0} 2^{2js}\|\Delta_j f\|_2^2 < \infty$$

De plus, on a l'équivalence de norme suivante

$$\|f\|_{H^s} \approx \|S_0 f\|_2 + \left(\sum_{j\geq 0} 2^{2js}\|\Delta_j f\|_2^2\right)^{1/2}$$

La version homogène de ces espaces en terme de décomposition de Littlewood-Paley repose sur la définition suivante

Définition 5. *Pour tout réels s, on dit que $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si :*

$$\sum_{j\geq 0} 2^{2js}\|\Delta_j f\|_2^2 < \infty$$

De plus, on a l'équivalence de norme suivante (modulo les polynômes de n variables à coefficient dans $\mathbb{C}$ que l'on note $\mathcal{P}$), pour tout $f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$

$$\|f\|_{\dot{H}^s} \approx \left(\sum_{j\geq 0} 2^{2js}\|\Delta_j f\|_2^2\right)^{1/2}$$

Les espaces de Sobolev sont un cas particulier d'espace plus grands à savoir les espaces de Besov dont voici une caractérisation en terme de décomposition de Littlewood-Paley

Lemme 23. *Soit* $1 \leq p \leq \infty$*,* $s \in \mathbb{R}$*,* $1 \leq q \leq \infty$*, pour tout* $N \in \mathbb{Z}$ *et* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *on a l'équivalence suivante*

$$f \in B^s_{p,q} \Longleftrightarrow S_N f \in L^p, \text{ pour tout } j \geq N, \ \Delta_j f \in L^p \text{ et } (2^{js}\|\Delta_j f\|_p)_{j\geq N} \in l^q(\mathbb{Z})$$

Dans le cas de la régularité positive $s > 0$*, l'espace de Besov s'obtient par interpolation, pour tout* $0 < \theta < 1$ *et* $k \in \mathbb{N}$

$$B^s_{p,q} = \left[W^{k_0,p}, W^{k_1,p}\right]_{\theta,q}$$

pour tout s *telle que* $s = (1-\theta)k_0 + \theta k_1$ *et* $k_0 < s < k_1$ *où l'espace* $W^{k,p}$ *est l'espace de Sobolev*

$$W^{k,p} = \{f \in L^p \ / \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \ |\alpha| \leq k, \ \partial^\alpha_x f \in L^p\}$$

La version homogène des espaces de Besov n'est définie que modulo les polynômes à coefficients complexes de n variables que l'on note $\mathcal{P}$.

Définition 6. *Soit* $1 \leq p \leq \infty$*,* $s \in \mathbb{R}$*, et* $1 \leq q \leq \infty$*. On définit l'espace de Sobolev homogène* $\dot{B}^s_{p,q}$ *comme l'espace de Banach des distributions* $f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$ *telles que pour tout* $j \in \mathbb{Z}$*,* $\Delta_j f \in L^p$ *et la suite* $(2^{js}\|\Delta_j f\|_p)_{j\in\mathbb{Z}} \in l^q(\mathbb{Z})$*. Plus précisement, l'espace* $\dot{B}^s_{p,q}$ *est défini par*

$$\dot{B}^s_{p,q} = \left\{ f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P} : \ \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} < \infty \right\},$$

où

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = \begin{cases} \left(\sum_j \left(2^{js}\|\Delta_j f\|_{L^p}\right)^q \right)^{1/q} & si\ q < \infty, \\ \sup_j 2^{js} \|\Delta_j f\|_{L^p} & si\ q = \infty. \end{cases}$$

La décomposition de Littlewood-Paley permet d'écrire une distribution en hautes et basses fréquences. La formule du paraproduit, introduite par J-M. Bony, permet d'estimer relativement facilement le produit fg de deux distributions de $\mathcal{S}'$. Plus précisément, en notant

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j f \quad \text{ et } \quad g = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j g$$

$$\Delta_j \Delta_k f = 0 \text{ si } |j-k| \geqslant 1, \quad \Delta_j (S_{k-1} g \Delta_k g) = 0 \text{ si } |j-k| \geqslant 5,$$

on a :

$$uv = T_f v + T_v g + R(f,g),$$

où

$$T_f v = \sum_{j\geqslant 1} S_{j-1}(f)\Delta_j g, \qquad R(f,g) = \sum_{|i-j|\leqslant 1} \Delta_i f \Delta_j g.$$

Les fréquences de u et v dans $T_u v$ et $T_v u$ sont éloignées tandis que celle du terme de reste $R(u, v)$ sont proches. Généralement, il est plus difficile d'estimer le terme de reste $R(u, v)$, cependant, dans le cas des distributions dont le support de la transformée de Fourier est contenu dans une boule $B = \{\xi \in \mathbb{R}^n / |\xi| \leq A2^j\}$ on ne considère que les intéractions entre fréquences éloignées.

4.6 Inégalité de Young et inégalité de Gagliardo-Nirenberg fractionnaire

On rappelle l'inégalité de Young fréquemment utilisée dans les problèmes d'équations aux dérivées partielles.

Lemme 24. *Pour tous a et b réels positifs ou nuls et tous p et q réels strictement positifs conjugués i.e tels que $1/p + 1/q = 1$, on a :*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Nous avons aussi utilisé l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg fractionnaire suivante

Lemme 25. *Pour tout $\omega \in (0, 1)$, et pour tout $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ vérifiant*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\omega}{q} + \frac{\omega}{r} \qquad \textit{et} \qquad s = \omega s_1 + s_2(1-\omega)$$

on a (à condition que le membre de droite ait un sens) :

$$\|(-\Delta)^s \theta\|_{L^p} \leq C \|(-\Delta)^{s_1}\theta\|_{L^q}^{\omega} \|(-\Delta)^{s_2}\theta\|_{L^r}^{1-\omega}$$

Annexe A3 : Continuité L^p de l'opérateur de Hilbert et de Riesz.

Lors des estimations dans l'étude de l'équation quasi-géostrophique on utilise très souvent les propriétés de continuité de l'opérateur de Riesz $(\mathcal{R}_j)_{j=1,2}$ où, pour tout $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{R}_j\theta = K_j * \theta \quad \text{avec} \quad K_j\theta = c_n \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \equiv \frac{\Omega_j(x)}{|x|^n}$$

On peut étendre cette définition à toute fonction dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 < p < \infty$ et l'opérateur est bornée sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour les mêmes valeurs de p. Plus précisement, on a le lemme suivant

Lemme 26. *Les transformées de Riesz R_j sont continues de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ si $1 < p < \infty$.*

Preuve. Ce lemme est une conséquence d'un résultat plus général sur la continuité des opérateurs d'intégrales singulières de type Calderón-Zygmund (voir [Ste] pp 35, ou [PGLR] pp 53-54). Pour montrer la continuité des opérateurs de Riesz et de l'opérateur de Hilbert nous allons utiliser le résultat suivant

Lemme 27. *Soit K un noyau vérifiant les conditions suivantes*

- $|K(x)| \leq \dfrac{C}{|x|^n}, \; x \neq 0$ *(1)*
- $\displaystyle\int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| \, dx \leq C$ *(2)*
- $\displaystyle\int_{R_1<|x|<R_2} K(x) \, dx = 0 \quad$ *pour tout* $\; 0 < R_1 < R_1 < \infty$ *(3)*

Alors l'opérateur T_ε défini par

$$T_\varepsilon f = \int_{|y|\geq\varepsilon} f(x-y)K(y) \, dy \quad \text{avec} \quad \varepsilon > 0$$

est continue de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et il existe une constante $A > 0$ indépendante de ε telle que

$$\|T_\varepsilon f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

De plus, la limite quand $\epsilon \to \infty$ existe et

$$T_\varepsilon f \xrightarrow[\epsilon\to\infty]{} Tf \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^n)$$

et l'on a l'inégalité suivante

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \text{ pour tout } 1 < p < \infty.$$

Preuve : Voir Stein [Ste] pp 35 □

Comme nous l'avons rappelé précédemment, les tranformées de Riesz sont des opérateurs de convolution dont le noyau

$$K(x) = c_n \frac{\Omega_j(x)}{|x|^n}$$

où $\Omega_j(x) = \dfrac{x_j}{|x|}$ est une fonction homogène de degré 0. On peut montrer que ce noyau K vérifie les conditions (1), (2) et (3) du lemme précédent :

La condition (1) est vérifiée puisque

$$\hat{K}_j(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}$$

La condition (2) vient du fait que $\Omega_j(x) = \dfrac{x_j}{|x|}$ est une fonction radiale, impaire, et bornée sur la restriction à la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ et donc

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega_j(x)\, dx = 0$$

Pour voir que la condition (3) est aussi vérifiée, on écrit

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\geq 2|y|} |K_j(x-y) - K_j(x)|\,dx &= c_n \int_{|x|\geq 2|y|} \left| \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} - \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right| dx \\
&= c_n \int_{|x|\geq 2|y|} \left| \frac{x_j(|x|^{n+1} - |x-y|^{n+1}) - y_j |x|^{n+1}}{|x|^{n+1}|x-y|^{n+1}} \right| dx \\
&\leq c'_n \int_{|x|\geq 2|y|} \left| \frac{|y||x|^{n+1} + |y||x|^{n+1}}{|x|^{n+1}|x-y|^{n+1}} \right| dx \\
&\leq c''_n \int_{|x|\geq 2|y|} \frac{|y|}{|x-y|^{n+1}}\,dx \\
&\leq c'''_n \int_{2|y|}^{\infty} \frac{|y|}{z^2}\,dz \\
&\leq c''''_n
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{R}_j$ est un opérateur borné de $L^p(\mathbb{R}^n) \mapsto L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $1 < p < \infty$.

$\square$

Lemme 28. *Soit T un opérateur de convolution dont le noyau vérifie les conditions (1), (2), (3) du lemme 25, alors T est continue de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $BMO(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve : On suppose que $\theta \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et on pose $f = T\theta = K * \theta$ où K est un noyau de convolution du type $K(y) = \dfrac{\Omega(y)}{|y|^n}$. Le but est montrer que g est contrôlée dans BMO. Puisque BMO et L^∞ sont des espaces dont la norme est invariante par changement d'échelle et par translation, autrement dit, elles vérifient, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda > 0$

$$\|f(a+\lambda x)\|_{BMO} = \|f(x)\|_{BMO} \qquad \text{et} \qquad \|f(a+\lambda x)\|_{L^\infty} = \|f(x)\|_{L^\infty}$$

Il suffit donc de vérifier la propriété de continuité sur un cube centré à l'origine c'est-à-dire

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q|\,dx \leq C_A \|f\|_{L^\infty}$$

Où $|Q| = 1$.

Pour cela, l'idée consiste à étudier ce qui ce passe près de l'origine et loin de l'origine. Près de l'origine nous allons utiliser des propriétés très classique (Plancherel et Hölder) et loin de l'origine la propriété 3 du lemme 27. Plus précisément, nous écrivons

$$\theta = \theta \mathbb{1}_{2Q} + \theta \mathbb{1}_{(2Q)^c} \equiv \theta_1 + \theta_2$$

Et donc $f = f_1 + f_2$ où $f_i = K * \theta_i$, $i = 1, 2$. On a, par Plancherel, puis Hölder

$$\|f_1\|_{L^1(Q)} \leq \|g_1\|_{L^2(Q)} \leq \|\hat{K}\|_{L^\infty}\|\theta_1\|_{L^2} \leq 2^{n/2}\|\hat{K}\|_\infty\|\theta\|_{L^\infty} \leq c_n\|\theta\|_{L^\infty}$$

D'où

$$\int_Q |f_1 - f_{1,Q}| \, dx \leq c_n\|\theta\|_{L^\infty}$$

Pour f_2 on doit montrer que

$$\int_Q |f_2 - f_{2,Q}| \, dx \leq c_n'\|\theta\|_{L^\infty}$$

L'idée est de remplacer $f_{2,Q}$ par une constante qui facilite l'estimation, ceci est possible car la norme est définie modulo les constantes. En particulier, on peut remplacer $f_{2,Q}$ par la constante $f_2(0)$ où

$$f_2(0) = \int_{\mathbb{R}^n} K(-y)\theta_2(y) \, dy$$

Il revient donc au même de montrer que

$$\int_Q |f_2(x) - f_2(0)| \, dx \leq C\|\theta\|_{L^\infty}$$

Mais ceci s'obtient facilement puisque

$$\begin{aligned} \int_Q |f_2(x) - f_2(0)| \, dx &\leq \int_Q \int_{\mathbb{R}^n} |K(x-y) - K(-y)| \, |\theta_2(y)| \, dy \, dx \\ &\leq \|\theta\|_{L^\infty} \int_Q \int_{(2Q)^c} |K(x-y) - K(-y)| \, dy \, dx \end{aligned}$$

Or, comme K vérifie la propriété (3) du lemme

$$\int_{(2Q)^c} |K(x-y) - K(-y)| \, dy \leq \int_{|y| \geq 2|x|} |K(x-y) - K(-y)| \, dy \leq C$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_Q |f_2(x) - f_2(0)| \, dx &\leq \|\theta\|_{L^\infty} \int_Q \int_{(2Q)^c} |K(x-y) - K(-y)| \, dy \, dx \\ &\leq C\|\theta\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

Les transformées de Riesz sont donc bornées de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $BMO(\mathbb{R}^n)$. En particulier, la transformation de Hilbert est continue de $L^p(\mathbb{R}^n) \mapsto L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $1 < p < \infty$ et de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $BMO(\mathbb{R}^n)$ car c'est un opérateur de convolution avec le noyau

$$K(x) = \frac{1}{\pi x}$$

Nous terminons cette section en donnant une preuve de la formule suivante

Lemme 29. *Nous avons :*

$$2\mathcal{H}(f\mathcal{H}f) = (\mathcal{H}f)^2 - f^2$$

Preuve : Comme cela a été rappelé dans [BLM] il suffit d'écrire que

$$\mathcal{H}(fg) = f\mathcal{H}g + g\mathcal{H}f + \mathcal{H}(\mathcal{H}f\ \mathcal{H}g)$$

En appliquant l'opérateur $\mathcal{H}$ et en utilisant le fait que $\mathcal{H}(\mathcal{H}f) = -f$, on trouve

$$-fg = \mathcal{H}(f\mathcal{H}g) + \mathcal{H}(g\mathcal{H}f) - \mathcal{H}f\ \mathcal{H}g$$

et en prenant $f = g$ on trouve

$$2\mathcal{H}(f\mathcal{H}f) = (\mathcal{H}f)^2 - f^2$$

$\square$

Bibliographie

[AH] H. Abidi and T. Hmidi, *On the global well-posedness of the critical quasi-geostrophic equation*, SIAM J. Math. Anal. 40, no. 1, 167-185, (2008).

[ADV] N. Alibaud, J. Droniou, J. Vovelle, *Occurence and non-appearance of shocks in fractal Burgers equations, Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 4, no. 3, 479-499, (2007).

[BCD] H. Bahouri, J.-Y Chemin, R. Danchin, *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*, 343p, Springer Verlag, 2011

[BLM] G. R. Baker, X. Li, and A. C. Morlet, *Analytic structure of 1D-transport equations with nonlocal fluxes*, Physica D, 91, 349-375, (1996).

[Bass] A. Basson, *Homogeneous Statistical Solutions and Local Energy Inequality for 3D Navier-Stokes Equations*, Comm. Math. Phys. 266, p. 17-35, (2006).

[BKM] J.T Beale, T. Kato, A. Majda, *Remarks on the breakdown of smooth solutions for the three dimensionnal Euler equations*, Comm. Math. Phys.,94, pp. 61-66, (1984).

[Beck] W. Beckner, *Pitt's inequality and the fractional Laplacian : sharp error estimates*, preprint, arxiv id : 0701939. (2012)

[BM02] A. L. Bertozzi, A. J. Majda, *Vorticity and the Mathematical Theory of Incompresible Fluid Flow* , Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Bo] J.M Bony, *Calcul symbolique et propagation de singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Ann. Ecole Norm. sup., 14, pp. 209-246, (1981).

[Bre] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*. Masson 1983.

[CV] L. Caffarelli and A. Vasseur, *Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostrophic equation,* Annal of Math (2006).

[Can] M. Cannone, *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes*, Diderot éditeur, Paris, 1995.

[CM] M. Cannone, Y. Meyer, *Littlewood-Paley decomposition and Navier-Stokes equations* Methods and Applications of Analysis, 2, pp. 307-319, (1995).

[CaC] A. Castro, D. Córdoba, *Global existence, singularities and Ill-posedness for a non-local flux* Advances in Math. 219, 6, 1916-1936, (2008).

[ChCCF] D. Chae, A. Córdoba, D. Córdoba, M. A. Fontelos, *Finite time singularities in a 1D model of the quasi-geostrophic equation.* Adv. Math. 194, 203-223, (2005).

[ChLee] D. Chae, J. Lee, *Global well-posedness in the super-critical dissipative quasi-geostrophic equations,* Comm. Math. Phys. 233, pp. 297-311, (2003).

[CMZ] Q. Chen, C. Miao, Z. Zhang, *A new Bernstein's inequality and the 2D Dissipative quasi-geostrophic equation*, Comm. in Math. Phys Volume 271, 3, 821-838, (2007).

[CGGKV] C. E. Kening, L. Caffarelli, F. Golse, Y. Guo and A. Vasseur, *Nonlinear partial differential equations*, pp 150, CRM, Birkhäuser (2011).

[CM2] R. Coifman, Y. Meyer, *Wavelets : Calderón-Zygmund and Multilinear Operators*, Cambridge University Press, 336 pages.

[CCW] P. Constantin, D. Córdoba, and J. Wu, *On the critical dissipative quasi-geostrophic equation,* Indiana Univ. Math. J, 50, pp. 97-107, (2001).

[CLM] P. Constantin, P. Lax, A. Majda, *A simple one-dimensional model for the three dimensional vorticity*, Comm. Pure Appl. Math. 38, 715-724, (1985).

[CMT] P. Constantin, A. J. Majda, E. Tabak, *Formation of strong fronts in the 2-D quasigeostrophic thermal active scalar*, Nonlinearity, 7, pp. 1495-1533, (1994).

[CNS] P.Constantin, Q. Nie, N. Schrörghofer, *Nonsingular surface quasi-geostrophic flow*, Phys. Lett. A, 241 (1998), pp. 168-172.

[CW] P. Constantin, J. Wu, *Behavior of solutions of 2D quasi-geostrophic equations.* SIAM J. Math. Anal. 30, 937-948, (1999).

[CW2] P. Constantin, J. Wu, *Statistical solutions of the Navier-Stokes equations on the phase space of vorticity and the inviscid limits*, IMA Preprint Series 1442, J. Math. Phy, 38, 3031-3045, (1996).

[CW3] P. Constantin, J. Wu, *Regularity of Hölder continuous solutions of the super-critical quasi-geostrophic equation*, Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Linéaire, 25, No.6, 1103-1110, (2008).

[CW4] P. Constantin, J. Wu, *Hölder continuity of solutions of supercritical dissipative hydrodynamic transport equations*, Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Linéaire, 26 (2009), No.1, 159-180

[CC] A. Córdoba, D. Córdoba, *A maximum principle applied to quasi-geostrophic equations,* Comm. Math. Phys. 249, pp. 511-528, (2004).

[Cord] D. Córdoba, *Nonexistence of simple hyperbolic blow-up for the quasi-geostrophic equation,* Annals of Math, 148, no. 3, pp. 1135-1152 (1998).

[CCF] A. Córdoba , D. Córdoba, M.A Fontelos, *Formation of singularities for a transport equation with nonlocal velocity*, Ann. of Math. 162 (3), 1375-1387, (2005).

[CCF2] A. Córdoba, D. Córdoba, M.A Fontelos, *Integral inequalities for the Hilbert transform applied to a nonlocal transport equation*, J. Math. Pure Appl. 86 529-540 (2006).

[CF2] A. Córdoba, C. Fefferman, *A weighted norm inequality for singular integrals*, Studia Math. 57 (1976), 97-101.

[Deg] E. De Giorgi, *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*, Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (3), 3 (1957), 25-43.

[Del] J-M Delort, *Existence de poche de tourbillon en dimension 2*, JAMS (1991), pp 553-586.

[FS] R. Farwig, H. Sohr, *Weighted L^q-theory for the Stokes resolvent in exterior domains*. J. Math. Soc. Japan 49, 251-288, (1997).

[HPGS] I. Held, R. Pierrehumbert, S. Garner, K. Swanson, *Surface Quasi-geostrophic dynamics*, J. Fluid Mech., 282, pp. 1-20 (1995).

[HM] T. Hmidi, *Régularité höldérienne des poches de tourbillon régulières*. J. Math. Pures Appl. (9) 84, no. 11, 1455-1495, (2005).

[HK] T. Hmidi, S. Keraani, *On the global solutions of the super-critical 2D quasi-geostrophic equation in Besov spaces*. Advances in Mathematics, 214 (2), 618-638, (2007).

[Dong] H. Dong, *Well-posedness for a transport equation with nonlocal velocity*, to appear in ARMA. (2012).

[HMW] R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden, *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform*, Trans. Amer. Math. Soc. 176, 227-251, (1973).

[Ju] N. Ju, *Existence and uniqueness of the solution to the dissipative 2D quasi-geostrophic equations in the Sobolev space*. Comm. Math. Phys. 251, no. 2, pp. 365-376, (2004).

[KNV] A. Kiselev, F. Nazarov, A. Volberg, *Global well-posedness for the critical* 2d *dissipative quasi-geostrophic equation*, Invent. Math, 167, 445-452, (2006).

[KNS] A. Kiselev, F. Nazarov, R. Shterenberg, *On blow up and regularity in dissipative Burgers equation*, Dynamics of PDEs, 5, 211-240, (2008).

[KN] A. Kiselev, F. Nazarov, *A simple energy pump for the surface quasi-geostrophic equation* in Nonlinear Partial Differential Equations, Proceedings of the Abel Symposium 2010, Helge Holden and Kenneth Karlsen, Editors.

[Klai] S. Klainerman, *Great problems in nonlinear evolution equations*, the AMS Millennium Conference in Los Angeles, August, 2000.

[Laz1] O. Lazar, *Global existence for the dissipative critical SQG equation*, to appear in Comm. Math. Phys. (2012).

[Laz2] O. Lazar, *Local existence for the dissipative critical SQG equation with small oscillations*, submitted. (2012)

[Pe] J. Pedlosky, *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York, (1987).

[PGLR] P.G. Lemarié-Rieusset, *Recent developments in the Navier-Stokes problem.* Chapman & Hall/CRC (2002).

[PLR2] P. G. Lemarié-Rieusset, *The Navier-Stokes equations in the critical Morrey-Campanato space*, Revista Mat. Ibero-amer. 23, pp. 897-930 (2007).

[PLR3] P. G. Lemarié-Rieusset, *Solutions faibles d'énergie infinie pour les équations de Navier-Stokes dans* $\mathbb{R}^3$, Comptes Rendus Acad. Sci. 328, pp. 1133-1138 (1999).

[PLRM] P. G. Lemarié-Rieusset, F. Marchand, *Solutions auto-similaires non radiales pour l'équation quasi-géostrophique dissipative critique,* Comptes Rendus Mathématique 341, pp. 535-538 (2005).

[RL1] D.Li, J. Rodrigo, *Blow-up of solutions for a 1D transport equation with nonlocal velocity and supercritical dissipation*, Advances in Mathematics, 217, no. 6, 2563-2568 (2008).

[RL2] D.Li, J. Rodrigo, *On a One-Dimensional Nonlocal Flux with Fractional Dissipation*, SIAM J. Math. Anal. 43, 507-526. (2011)

[Maj] A. J. Majda, *Random shearing model for isotropic turbulent diffusion* J. Stat. Phy (75), pp 1153-1165.

[Mar] F. Marchand, *Existence and regularity of weak solutions to the quasi-geostrophic equations in the spaces* L^p *or* $\dot{H}^{-1/2}$, Comm. Math. Phys. 277, 45-67 (2008).

[Maly] J. Maly, W. P. Ziemer, *Fine regularity of solutions of elliptic partial differential equations* (Mathematical Surveys and Monographs 51), 291 pp.

[Mo] A. Morlet, *Further properties of a continuum of model equations with globally defined flux.* J. Math. Anal. Appl. 221, 132-160, (1998).

[Muc] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function.* Transactions of the American Mathematical Society, vol. 165 : 207-226, (1972).

[Res] S. Resnick, *Dynamical problems in nonlinear advective partial differential equations*, Ph.D. Thesis, University of Chicago (1995).

[Ste] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability properties of functions*, Princeton University Press, (1970).

[Tayl] M. E. Taylor, *Pseudodifferential operators and Nonlinear PDE*, Birkhäuser (1993).

[PV] B. Perthame, A. Vasseur, *Regularization in Keller-Segel type systems and the De Giorgi method.* Commun. Math. Sci. 10, no. 2, 463-476, (2012).

[Wu] J. Wu, *Global solutions of the 2D dissipative quasi-geostrophic equation in Besov spaces*. SIAM J. Math. Anal, 36, pp. 1014-1030, (2005).

[Wu2] J. Wu, *2D dissipative quasi-geostrophic equation in Besov spaces*. SIAM J. Math. Anal, 36, pp. 1014-1030, (2005).

[Wu3] J. Wu, *Solutions to the 2D quasi-geostrophic equations in Hölder spaces*, Nonlinear Analysis, 62, 579-594, (2005).